Indução

ASSOCIAÇÃO ATRACTOR

PREÂMBULO

O tema da indução matemática tem um grande valor formativo, que transcende a utilidade de que se reveste em numerosas situações concretas. Ao longo do tempo, os programas têm variado e o primeiro contacto com o tema já se deu por vezes ao nível do ensino secundário e outras vezes apenas ao nível do ensino universitário. Há que procurar que os alunos compreendam as ideias subjacentes, evitando uma espécie de *aprendizagem mecanizada*. Quem alguma vez tenha tido uma experiência de ensino relacionada com o tema, num ou noutro dos níveis, ter-se-á muito provavelmente confrontado com situações de alunos que *sabem* que quando há que resolver um problema de indução, é dada uma fórmula em que entra a letra n, e a regra para resolver um tal problema é: primeiro substitui-se n por 1 e depois por $n+1$, etc., mas que não têm a menor noção do raciocínio envolvido.

No texto que se segue, descreve-se uma forma de apresentação do raciocínio de *indução* (às vezes designada por *indução finita*, por razões adiante indicadas). Na primeira secção apresenta-se um *jogo das lâmpadas*, cuja resolução o leitor deverá procurar descobrir usando uma versão interactiva do jogo, criada pelo Atractor [1]. Com suficiente prática, o leitor vai adquirindo consciência do que há que fazer para alcançar o objectivo de tal jogo e, em particular, terá relacionado a resolução do jogo para uma fila de lâmpadas com a resolução do mesmo jogo para filas mais curtas. Terá aplicado num caso particular, eventualmente sem o saber, uma forma de raciocínio de indução, sem que na situação surja para prova qualquer fórmula dependente de um n.

Ressalvas:

1. Um texto publicado na revista Educação e Matemática terá como leitores potenciais, professores de matemática que saberão perfeitamente o que é o raciocínio de indução matemática. O nível de detalhe e minúcia do capítulo seguinte não teve esse tipo de leitores em vista. Para eles, o texto poderá ser útil apenas como sugestão de experiências a fazer com os seus alunos ao apresentar-lhes a noção de indução, evidentemente com as adaptações adequadas ao nível etário.
2. Esta apresentação não foi testada em ambiente de aula e isso constitui de momento uma limitação. O método foi testado com sucesso junto de crianças frequentando o 7.º ano do ensino básico, mas não em ambiente de aula e todos sabemos que não é a mesma coisa. O Atractor tenciona testar o método com crianças ainda mais novas e acolherá com interesse relatos de experiências que venham a ser feitas em ambiente de aula.

JOGO DAS LÂMPADAS

Regras do jogo

Neste jogo há uma fila de lâmpadas, cada uma das quais pode estar acesa ou apagada. Por exemplo, a fila de sete lâmpadas representada na figura  tem quatro acesas e três apagadas. Se o leitor clicar em qualquer das lâmpadas, acesas ou apagadas, o efeito desses cliques pode ser nulo (o clique não muda nada) ou não, neste caso mudando apenas o estado da lâmpada em que clicou: acende-a se estava apagada e apaga-a se estava acesa.

A primeira coisa a fazer é descobrir a regra: quando é que um clique muda o estado da lâmpada clicada e quando é que a deixa no mesmo? O leitor é fortemente encorajado a ver em [1] alguns exemplos interactivos e fazer tentativas, observando o efeito dos cliques e tentando *descobrir por si* a regra geral.

Figura 1

Essas experiências ajudá-lo-ão a familiarizar-se com o jogo das lâmpadas e isso é importante para a fase seguinte. Adie a leitura do que se segue até ter descoberto essas regras. Não querendo seguir o conselho, poderá buscar no apêndice alguma ajuda. Conhecidas as regras, eis dois factos que convém ter presentes:

1. Para uma lâmpada diferente da primeira, mudar (ou não) de

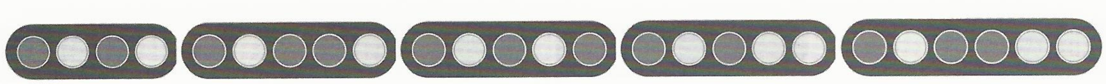


Figura 2

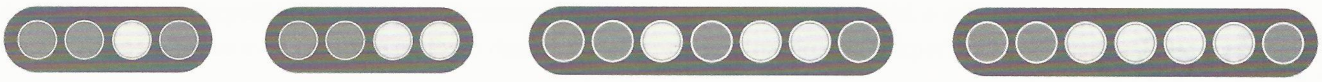


Figura 3

estado por um clique só depende do estado das lâmpadas que estão à sua esquerda.

Sendo assim, como nas cinco filas representadas na figura 2 as lâmpadas nas três primeiras posições estão em idêntico estado (apagada, acesa, apagada), um clique numa lâmpada qualquer até à ordem 4 de uma das filas muda o estado da lâmpada se e só se também mudar em qualquer das outras filas. E o mesmo podemos afirmar para as filas da figura 3:

2. Uma consequência de *1. é que se uma lâmpada mudou de estado por um clique, um novo clique nela, imediatamente a seguir, fá-la-á voltar ao estado anterior, pois o que estava à sua esquerda não sofreu alteração.* Por exemplo, se o leitor já aprendeu as regras, sabe que um clique na quarta lâmpada da primeira fila da figura 3, muda o estado dessa lâmpada, passando a fila a ficar igual à segunda fila dessa figura. E um novo clique na quarta lâmpada desta fila fá-la ganhar o aspecto inicial da primeira fila. Como a terceira e a quarta fila coincidem (entre si e com as duas primeiras) até à terceira posição, um clique na quarta lâmpada também muda necessariamente o estado da lâmpada em ambos os casos (envia a terceira fila na quarta ou a quarta na terceira).

OBJECTIVO DO JOGO

Partindo de uma fila só com duas lâmpadas, ambas apagadas, use cliques que conduzam a que essa fila fique só com a última lâmpada acesa (verá que é muito simples). Em seguida, usando cliques adequados a partir da posição a que chegou, volte à posição inicial, em que as duas lâmpadas estavam apagadas. Observe que, para o fazer, usou exactamente os mesmos (três) cliques (e na mesma ordem) que tinha usado na fase inicial para ter só a segunda lâmpada acesa. A figura 4 representa as diversas fases para obter: primeiro, uma fila só com a última lâmpada acesa, depois para regressar à situação de partida; nessa figura, as circunferências escuras indicam a lâmpada a clicar para passar ao estado seguinte.

Faça algo semelhante para uma fila com três lâmpadas apagadas: como conseguir que só a terceira fique acesa? Nesta fase do texto, já saberá por certo que, pelas regras do jogo, para conseguir acender a terceira lâmpada, à esquerda dela só a segunda deve estar acesa. Mas a essa situação já sabe como chegar: ter só a segunda lâmpada acesa foi o jogo muito simples proposto no início! Clicando em seguida na terceira lâmpada, ela acende e depois há só que apagar a segunda lâmpada. Mas isso foi também o que fez quando, no jogo anterior, voltou à fila com as duas lâmpadas apagadas. A figura 5 representa as fases descritas. Num jogo análogo (acender só a última lâmpada) para filas com 4 ou 5 lâmpadas apagadas, a situação é semelhante à encontrada nos dois casos já vistos.

> (A) *Numa fila de lâmpadas, se todas à esquerda da última estiverem apagadas, para mudar o estado da última lâmpada terá obrigatoriamente de conseguir ter acesa apenas a imediatamente anterior, depois mudar o estado da última e em seguida apagar a imediatamente anterior.*

(A) descreve um caminho para jogar o jogo, qualquer que seja a fila de lâmpadas, usando um caminho semelhante para uma fila mais curta! Isto garante que há sempre um tal caminho, porque, *se existissem filas para as quais não houvesse um tal caminho, bastaria escolher a mais curta de entre elas.* Por ela ser a mais curta nessas condições, para a fila obtida dela tirando a última lâmpada, haveria, para essa ainda mais curta, um caminho e, aplicando o processo descrito em (A), concluiríamos que também *existiria um caminho* para aquela de que partíramos como sendo a mais curta sem um tal caminho.

Depois de ter jogado os jogos e lido o texto precedente, o leitor poderá ser tentado a explicar o jogo a um amigo e a afirmar: eu sou capaz de jogar um jogo destes com qualquer número

Figura 4

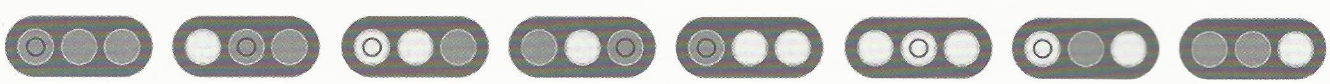


Figura 5

Figura 6

de lâmpadas, ou um pouco mais modestamente, concretizar, afirmando por exemplo que é capaz de jogar o jogo de lâmpadas com 37 lâmpadas.

Sem querermos menosprezar a capacidade do leitor, veremos adiante por que razão esta afirmação está errada e isso não contradiz nada do que está anteriormente escrito.

QUANTAS JOGADAS?

O exemplo usado para descrever uma iniciação ao raciocínio de indução foi propositadamente escolhido por forma a não envolver explicitamente nenhuma afirmação quantitativa. E não há, pois, nenhuma fórmula concreta a ser demonstrada. Tomando como ponto de partida esse exemplo, vamos agora encarar a questão da contagem do número mínimo de jogadas que serão/seriam necessárias para concretizar o jogo das lâmpadas.

Designemos por $f(n)$ o número mínimo de jogadas para concluir o jogo com uma fila de n lâmpadas todas inicialmente apagadas. Claro que $f(1)=1$ e do que vimos atrás resulta que $f(2)=3$ e $f(3)=7$. Vimos como, conhecendo um caminho para o jogo com uma fila de n lâmpadas, também conhecemos para uma fila com mais uma lâmpada: antes de acendermos essa última lâmpada de ordem $n+1$, temos de ter acesa apenas a anterior de ordem n (com $f(n)$ cliques), depois acendemos com um clique a de ordem $n+1$ e finalmente, outra vez com os mesmos $f(n)$ cliques (pela mesma ordem), apagamos a de ordem n. Ao todo usámos $f(n)+1+f(n)$ cliques e não podíamos ter usado menos, portanto concluímos que $f(n+1)=2f(n)+1$. É fácil calcular a partir desta igualdade os primeiros valores do número de cliques necessários:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(n)	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

Repare o leitor que todos os números obtidos precedem imediatamente potências de 2. Será que, para qualquer n, $f(n)=2^n-1$? A igualdade é válida para $n=1$: $f(1)=1=2^1-1$; se houvesse algum número para o qual ela não fosse válida, haveria um primeiro número, necessariamente diferente de 1 para o qual seria errada. Chamando p ao seu antecessor, teríamos $f(p) = 2^p-1$ e $f(p+1) \neq 2^{p+1}-1$. Mas já vimos que $f(p+1) = 2f(p)+1 = 2(2^p-1)+1 = 2^{p+1}-1$, contrariamente ao que supuséramos (que era *haver um primeiro número p+1 para o qual a igualdade não se verificava)*. Portanto, está provado que aquela fórmula é válida para qualquer n.

Fazendo as contas para o caso da hipotética afirmação do leitor, referida no final da última secção, chegamos à conclusão que seriam precisos $2^{37}-1=137\,438\,953\,471$ movimentos para jogar o jogo com uma fila de 37 lâmpadas. Um leitor com uma velocidade[1] de cliques da ordem de 7 por segundo, se pudesse estar permanentemente a jogar, noite e dia, num ano bissexto teria feito $7.60.60.24.366 = 221\,356\,800$ cliques. Ora, mesmo nessas condições completamente irrealistas, demoraria cerca de 621 anos[2] para completar o jogo...

O leitor poderá retorquir que então o raciocínio de indução falha na hipotética afirmação sobre a sua capacidade de jogar o jogo das 37 lâmpadas. A resposta é: o raciocínio em si não está a falhar, o que acontece é que não se verifica uma das condições da indução para a afirmação de que *é capaz de jogar...* Não é verdade que, *se o jogador é capaz de jogar para n lâmpadas, então também é para n+1*[3].

OUTRAS FORMAS DE INDUÇÃO[4]

Propriedades do conjunto N (dos números naturais) que foram implícita ou explicitamente usadas atrás:

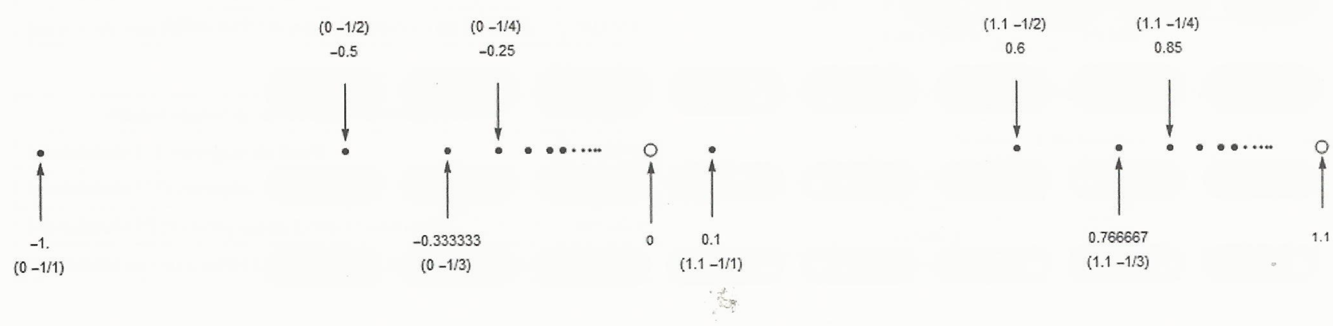
Toda a parte não-vazia de N tem primeiro elemento (traduz-se esta propriedade dizendo que o conjunto N é bem ordenado).

i1 - N é a única parte de N satisfazendo as condições:

a. tem o primeiro elemento de N;

b. se tem um número, também tem o seguinte.

(Se houvesse em N uma parte $A \neq N$ com estas propriedades, considerando o primeiro elemento b no complementar de A em N, o seu antecessor $b-1$ estaria em A e, portanto, também estaria o sucessor de $b-1$ que é b). Para uma afirmação Pn dependente de n, chamando A ao conjunto dos n para os quais Pn é satisfeita, concluir que se A satisfaz aquelas duas condições então coincide com N equivale a afirmar que, se $P1$ é verdadeira e se P_n implica P_{n+1} então P_n é verdadeira para todo o n.



Consideremos agora as duas sucessões $(-1/n)_n$ e $(1.1-1/n)_n$, que são crescentes e convergentes, designemos por A e B os respectivos contradomínios e por M a sua reunião.

Note-se que M é bem ordenado. Será que a indução, sob a forma atrás usada em N, funciona em M? A resposta é não. É verdade que: i) o primeiro número de M, que é -1, é negativo; e ii) se um número de M é negativo, o seguinte também é. Mas nem todos os números de M são negativos. E o primeiro número não negativo de M, que é 0.1, não tem antecessor em M, isto é, 0.1 não é o sucessor de nenhum número de M e, portanto, não podemos aplicar o argumento anterior. Há uma parte não-vazia de *M diferente de M*, que satisfaz as duas condições. Conclusão: a indução, sob a forma atrás enunciada para N, não funciona para conjuntos só bem ordenados. Fortalecendo a condição *i1 - b)* para *i2 – b)* podemos afirmar o seguinte:

Num conjunto P bem ordenado qualquer, P é a única parte D de P satisfazendo

i2.a. - D tem o primeiro elemento de P;

i2.b. - se D tem todos os elementos menores do que um m de P, também tem esse elemento m.

Se D não coincidisse com P, tomávamos o primeiro elemento m de P que não estivesse em D (existiria, por P ser bem ordenado e D ser não vazio devido a *i2-a)*; os elementos menores do que m pertenceriam a D, e *i2–b* implicaria que m também pertenceria a D, o que contrariaria a forma como m foi escolhido.

Voltando ao contraexemplo M indicado atrás, notemos que M já não serve como contraexemplo[5] para o princípio da indução *i2*: só M satisfaz as duas condições *i2.*

Deixa-se ao leitor a verificação de que o conjunto dos números negativos de M não satisfaz *i2 - b).*

APÊNDICE

As regras do jogo das lâmpadas

Se não quer descobri-las sem ajuda, comece por observar as imagens seguintes. Por cima daquelas cujo clique muda o estado, está uma seta.

Poderá observar que a primeira lâmpada tem sempre uma seta: o estado da primeira muda sempre por um clique. Pode não haver mais nenhuma que mude o estado ao ser clicada (quando é que isso acontece?); ou pode haver (no máximo) uma segunda, que, ao ser clicada, muda de estado. Nesta última hipótese, qual é essa segunda lâmpada que muda de estado? Sabendo que uma lâmpada diferente da primeira *mudar de estado* só depende do estado das lâmpadas que estão à sua esquerda, tente novamente descobrir a regra. E volte a jogar com os jogos facultados em [1]. Em último caso, veja a resposta na seguinte frase:

Será a lâmpada seguinte à primeira acesa.

Notas

1 Um programa adequado poderá realizar jogadas a grande velocidade; mas, para um jogador humano, supor 7 cliques por segundo traduz já um certo optimismo.

2 Supostos todos bissextos para simplificar as contas…

3 Para evitarmos evocar aspectos menos agradáveis, digamos que o leitor poderá ter descoberto que talvez tenha melhores formas de passar o tempo do que jogar um jogo como este durante vários dias ou meses seguidos.

4 A leitura desta secção não é essencial à plena compreensão do resto do artigo.

5 A construção do contraexemplo M para *i1* usava um elemento (diferente do primeiro) sem antecessor, e num conjunto bem ordenado não vazio um tal elemento existe se e só se houver um conjunto infinito majorado. Mas um conjunto infinito bem ordenado sem partes infinitas majoradas é, do ponto de vista da relação de ordem, perfeitamente equivalente a N. Em N verificam-se *i1* e i2 e essa situação é por vezes designada por *princípio da indução finita* precisamente por a hipótese de indução se referir sempre a um conjunto finito de valores.

Referências

[1] https://www.atractor.pt/mat/jogodaslampadas

Associação Atractor