No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu *site* *www.atractor.pt*. Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

TEOREMAS COLORIDOS

O triângulo de Pascal é uma tabela infinita de números em posição triangular, que se tornou famosa por exibir propriedades aritméticas surpreendentes. Para cada natural $d \geq 2$, o triângulo de Pascal módulo d obtém-se substituindo cada entrada do triângulo de Pascal pelo resto da sua divisão inteira por d. Propomos-lhe que visualize nestes novos arranjos algumas relações interessantes de divisibilidade entre os coeficientes binomiais.

Comecemos por recordar que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, na n-ésima linha do triângulo de Pascal estão, por esta ordem, os números

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

onde $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}$ se $0 \leq j \leq n$. Na j-ésima entrada da linha n está o número de subconjuntos com j elementos de um conjunto com cardinal n. Por isso, para todo o $n \in \mathbb{N}$, cada coeficiente binomial é um inteiro; e a soma das entradas da linha n conta o número total de subconjuntos de um conjunto com n elementos, o que permite escrever

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n. \tag{1}$$

Podemos construir o triângulo de Pascal recursivamente, linha a linha, uma vez que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ e se tem, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e todo o $j \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}, \tag{2}$$

igualdade que descreve o seguinte procedimento: para determinar o número de subconjuntos com $j \geq 1$ elementos de um conjunto A com cardinal $n+1$, fixamos $\alpha \in A$ e procuramos os subconjuntos de A com j elementos que contêm α (havendo $\binom{n}{j-1}$ possibilidades) e os que não contêm α (há $\binom{n}{j}$ escolhas possíveis). Na realidade, para obter a linha $n+1$ basta conhecer a linha n até à entrada $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ porque, para todo $n \in \mathbb{N}$ e qualquer $j \in \{0, 1, \cdots, n\}$, se tem

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}. \tag{3}$$

A figura 1 mostra as primeiras linhas do triângulo de Pascal módulo 2: os pontos a branco (invisíveis) representam as entradas nulas, que correspondem a posições com números pares no triângulo de Pascal; os pontos a preto substituem as entradas iguais a 1. Detetam-se nele uns grandes triângulos centrais que se iniciam nas linhas $n = 2^k$, para $k \in \mathbb{N}$, nas quais, com exceção dos extremos (iguais a 1 e correspondentes a $\binom{n}{0}$ e $\binom{n}{n}$), todas as entradas são iguais a zero. Nas linhas p^k, para $p = 3, 5, 7, 11$ e $k \in \mathbb{N}$, dos triângulos de Pascal módulo p ilustrados na figura 2 (com $p-1$ cores para as entradas não nulas), notamos um padrão idêntico. Conjeturamos, por isso, que as entradas interiores da linha p^k são divisíveis por p sempre que p é primo. E, de facto, designando por mdc o máximo divisor co-

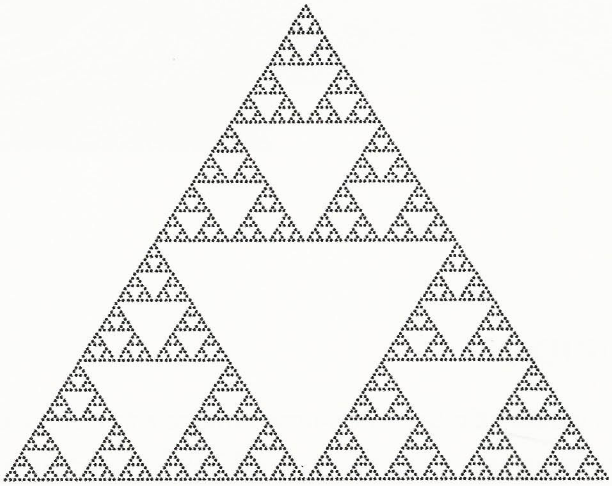

Figura 1.

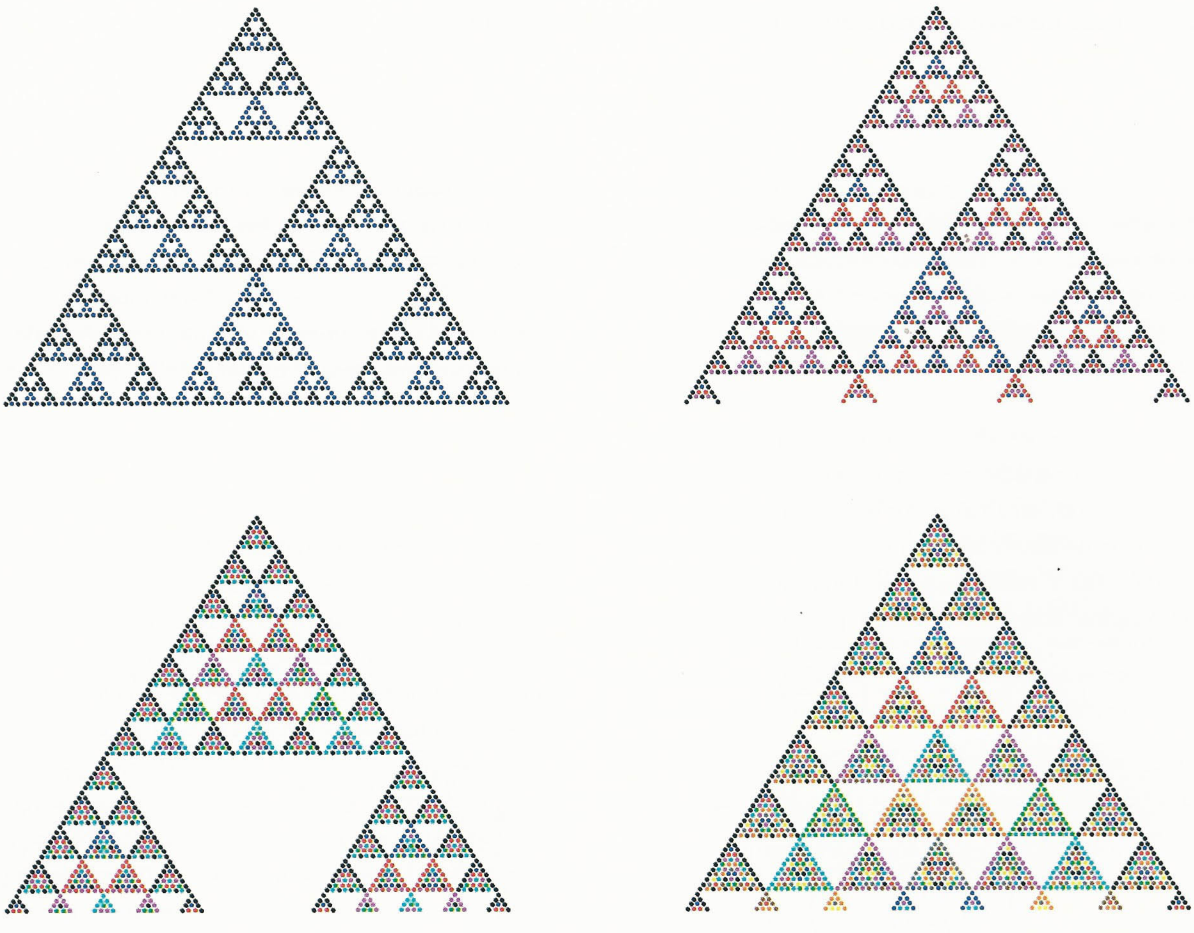

Figura 2.

mum de uma lista de inteiros, se $n \geq 2$ então

$$\operatorname{mdc}\left\{\binom{n}{j} : 1 \leq j \leq n-1\right\} = \begin{cases} p & \text{se existem um primo } p \text{ e } k \in \mathbb{N} \text{ tais que } n = p^k \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4}$$

A primeira prova desta propriedade é atribuída a B. Ram, e foi publicada em [1]. A generalização obtida em [3] afirma que, dados naturais n e $s \leq n$,

$$\operatorname{mdc}\left\{\binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{s}\right\} = \frac{n}{\operatorname{mmc}\left\{d \in \mathbb{N} : d \text{ divide } n \text{ e } d \leq s\right\}}, \tag{5}$$

onde mmc designa o menor múltiplo comum.

A análise das linhas $n = 6, 10, 12$ do triângulo de Pascal (parcialmente reproduzido na figura 3) revela mais informação interessante: ainda que para estes valores de n o máximo divisor comum das entradas interiores seja 1, todas as entradas interiores de índice primo com n são divisíveis por n; e, para cada par de entradas interiores, consecutivas ou não, o máximo divisor comum delas é estritamente maior do que 1. É, portanto, natural conjeturar que, para cada natural $n \geq 2$,

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 **6** 15 20 15 **6** 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 **10** 45 **120** 210 252 210 **120** 45 **10** 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 **12** 66 220 495 **792** 924 **792** 495 220 66 **12** 1

Figura 3.

$$\operatorname{mdc}\left\{\binom{n}{j} : 1 \leq j \leq n-1 \text{ e } \operatorname{mdc}(j,n) = 1\right\} = n \tag{6}$$

e

$$\operatorname{mdc}\left\{\binom{n}{i}, \binom{n}{j} : 1 \leq i, j \leq n-1\right\} > 1.$$

Provemos que assim é. Fixemos $n \in \mathbb{N}$ e consideremos o conjunto

$$\mathcal{E}_n := \left\{\binom{n}{j} : 1 \leq j \leq n-1 \text{ e } \operatorname{mdc}(j,n) = 1\right\}$$

e denotemos por D_n o máximo divisor comum dos elementos de $\mathcal{E}_n$. Como $\binom{n}{1} = n \in \mathcal{E}_n$, o natural D_n tem de dividir n, logo $D_n \leq n$. Além disso, se $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$$j\binom{n}{j} = j\,\frac{n!}{j!\,(n-j)!}$$

$$= n\,\frac{(n-1)!}{(j-1)!\,(n-1-(j-1))!} = n\binom{n-1}{j-1}$$

e, portanto, n divide $j\binom{n}{j}$. Mas, se n e j são primos entre si, n tem de dividir $\binom{n}{j}$. Consequentemente, n divide D_n, o que, sendo $D_n \leq n$, só é possível se $D_n = n$.

Quanto à segunda propriedade, uma vez que se tem a igualdade (3), basta considerar valores

$$i, j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

garantindo-se assim que $i + j \leq n$. Além disso, uma conta simples confirma que

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{i}.$$

Se, para algum par $1 \leq i, j \leq n-1$, os coeficientes $\binom{n}{i}$ e $\binom{n}{j}$ fossem primos entre si, $\binom{n}{i}$ teria de dividir $\binom{n-j}{i}$, o que não é possível porque $\binom{n}{i} > \binom{n-j}{i}$.

Voltemos ao triângulo de Pascal módulo 2 e reparemos nas linhas de índice 10, 12, 14; depois atentemos nas linhas 8, 12, 16 do triângulo de Pascal módulo 4, que a figura 4 ilustra. Notamos que as entradas em posições ímpares destas linhas são iguais a zero. Esse padrão traduz nestes casos particulares uma propriedade mais geral: para todo o natural m,

$$\operatorname{mdc}\left\{\binom{2m}{1}, \binom{2m}{3}, \binom{2m}{5}, \cdots, \binom{2m}{2m-1}\right\} = 2^{1+\nu_2(m)}, \tag{7}$$

sendo $\nu_2(m)$ a maior potência de 2 que divide m. Vejamos

Figura 4.

1 0 4 0 2 0 4 0 7 0 0 0 4 0 0 0 7 0 4 0 2 0 4 0 1

Figura 5.

por que é válida. Da igualdade (1) aplicada a $n = 2m$ e da equação (2) quando $n = 2m - 1$ resulta que

$$\binom{2m}{1} + \binom{2m}{3} + \binom{2m}{5} + \cdots + \binom{2m}{2m-1} = 2^{2m-1}.$$

Daqui concluímos que, se $d \in \mathbb{N}$ divide todas as parcelas $\binom{2m}{j}$ da soma anterior, então d tem de dividir 2^{2m-1} e, portanto, d tem de ser uma potência de 2. Além disso, se $m = 2^k N$, onde N é ímpar e $k = \nu_2(m) \in \mathbb{N}_0$, então, por d dividir $\binom{2m}{1} = 2m = 2^{k+1} N$, deduzimos que $d \leq 2^{k+1}$. Observe-se ainda que, como

$$\binom{2^{k+1}N}{j} = \frac{2^{k+1}N}{j} \binom{2^{k+1}N-1}{j-1}$$

e os coeficientes binomiais são inteiros, para cada j ímpar existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\binom{2^{k+1}N}{j} = 2^{k+1}M$. O que confirma que 2^{k+1} divide $\binom{2m}{j}$ para todo o j ímpar em $\{1, 2, \cdots, 2m-1\}$.

Por um argumento semelhante mostra-se que, para cada primo p e todo o natural m,

$$\text{mdc}\left\{\binom{pm}{j} : 1 \leq j \leq pm \text{ e } \text{mdc}(j,p) = 1\right\} = p^{1+\nu_p(m)}, \tag{8}$$

sendo $\nu_p(m) \in \mathbb{N}_0$ a maior potência de p que divide m. Ou seja, as entradas em posição j que é primo com p da linha pm são divisíveis por p, e até por uma potência maior de p se este primo dividir m. Por exemplo, para $n = 6$, a tabela seguinte assinala a verde as entradas interiores na sexta linha que são divisíveis por 2, a magenta as divisíveis por 3 e a azul as divisíveis por 5.

0.ª	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª
1	6	15	20	15	6	1
1	6	15	20	15	6	1
1	6	15	20	15	6	1

Em particular, se n é uma potência p^k do primo p, já sabemos que as entradas interiores da n-ésima linha são divisíveis por p; vemos agora que, destas entradas, as de índice primo com p são divisíveis por p^k, e portanto essas entradas são simultaneamente zero nos triângulos de Pascal módulo $p, p^2, \cdots, p^k$.

Em [4] estabeleceu-se a seguinte generalização da fórmula (8): para quaisquer naturais m e q, tem-se

$$\text{mdc}\left\{\binom{qm}{j} : 1 \leq j \leq qm \text{ e } \text{mdc}(j,q) = 1\right\} = q \prod_{p:\ p \mid \text{mdc}(q,m)} p^{\nu_p(m)},$$

sendo o produto feito com todos os primos p que dividem $\text{mdc}(q,m)$. Pode conferir-se esta propriedade num exemplo como o da figura 5 que mostra, a vermelho, as entradas em posição j primo com 4 da linha 24 no triângulo de Pascal módulo 8.

O Atractor disponibiliza em [2] material interativo que o leitor poderá utilizar para, por exemplo, descobrir fórmulas explícitas para os seguintes máximos divisores comuns.

(A) $\mathrm{mdc}\left\{\binom{n}{j}: 1 \leq j \leq n-1 \text{ e } \mathrm{mdc}(j,n) > 1\right\}$.

Denotemos por d_n este máximo divisor comum para naturais $n > 2$. O gráfico da figura 6 (com os valores de d_n para n composto entre 4 e 24) e a tabela da figura 7 (mostrando d_n para n composto entre 4 e 203) sugerem desde logo que para alguns naturais n pares se tem $d_n = n - 1$ (por exemplo, n = 6, 12, 14, 18, 20, 24); que para vários outros naturais pares $d_n = 1$ (veja-se o caso de n = 22, 34, 36, 40, 46, 52); e que d_n é par para as potências de 2.

Pode ler-se em [2] uma demonstração de que, se $n > 2$ é par mas não é uma potência de 2, então d_n é ímpar e

- $d_n = q$, se $n - 1$ é uma potência do primo q;
- $d_n = 1$, caso contrário.

O que sugere a tabela da figura 7 quanto ao valor de d_n quando $n \geq 4$ é uma potência de 2? Parece que para algumas potências de 2 se tem $d_n = 2(n-1)$, como quando n = 4, 8, 32, 128, e que para outras $d_n = 2$ (veja-se o caso de n = 16, 64, 256). Observe-se que, se $n = 2^k$ para algum natural $k \geq 2$, então

$$d_n = \mathrm{mdc}\left\{\binom{n}{j}: 1 \leq j \leq n-1 \text{ e } j \text{ é par}\right\}.$$

Provou-se em [2] que, se $n \geq 4$ é uma potência de 2, então d_n é par e

- $d_n = 2(n-1)$, se $n - 1$ é primo;
- $d_n = 2$, caso contrário.

Além disso, mostrou-se que, quando n é uma potência de 2, não se pode ter $n - 1 = q^\alpha$ para um primo q (ímpar) e um natural $\alpha > 1$.

Deixamos ao leitor o desafio de estudar a questão (A) para os naturais ímpares.

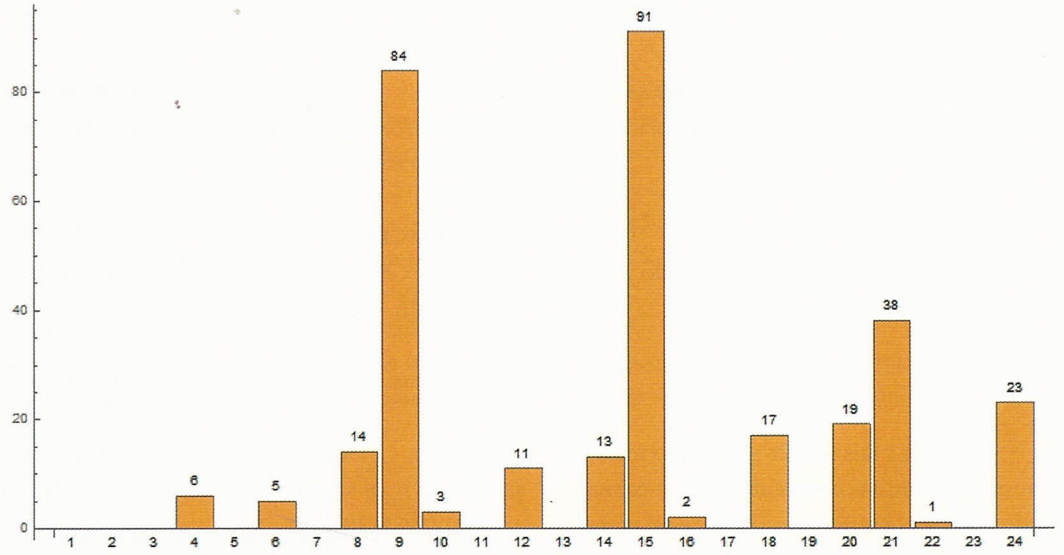

Figura 6.

4 → 6	24 → 23	40 → 1	57 → 7	75 → 2701	91 → 332 949	108 → 107	123 → 671	140 → 139	155 → 1661	171 → 13	187 → 4 640 264 125 151
6 → 5	25 → 2530	42 → 41	58 → 1	76 → 1	92 → 1	110 → 109	124 → 1	141 → 139	156 → 1	172 → 1	188 → 1
8 → 14	26 → 5	44 → 43	60 → 59	77 → 36 436 490	93 → 1	111 → 109	125 → 4 264 205	142 → 1	158 → 157	174 → 173	189 → 1
9 → 84	27 → 195	45 → 43	62 → 61	78 → 1	94 → 1	112 → 1	126 → 5	143 → 4 257 614 897	159 → 12 403	175 → 173	190 → 1
10 → 3	28 → 3	46 → 1	63 → 1891	80 → 79	95 → 1457	114 → 113	128 → 254	144 → 1	160 → 1	176 → 1	192 → 191
12 → 11	30 → 29	48 → 47	64 → 2	81 → 474	96 → 1	115 → 113	129 → 508	145 → 1562	161 → 5 258 872	177 → 1	194 → 193
14 → 13	32 → 62	49 → 2 603 048	65 → 15 128	82 → 3	98 → 97	116 → 1	130 → 1	146 → 1	162 → 1	178 → 1	195 → 18 721
15 → 91	33 → 124	50 → 7	66 → 1	84 → 83	99 → 679	117 → 1	132 → 131	147 → 73	164 → 163	180 → 179	196 → 1
16 → 2	34 → 1	51 → 35	68 → 67	85 → 10 209	100 → 1	118 → 1	133 → 62 954 408	148 → 1	165 → 163	182 → 181	198 → 197
18 → 17	35 → 23 188	52 → 1	69 → 134	86 → 1	102 → 101	119 → 193 343	134 → 1	150 → 149	166 → 1	183 → 2353	200 → 199
20 → 19	36 → 1	54 → 53	70 → 1	87 → 43	104 → 103	120 → 1	135 → 67	152 → 151	168 → 167	184 → 1	201 → 199
21 → 38	38 → 37	55 → 159	72 → 71	88 → 1	105 → 103	121 → 86 024 301	136 → 1	153 → 151	169 → 99 743 025 008 090 646	185 → 11 041	202 → 1
22 → 1	39 → 703	56 → 1	74 → 73	90 → 89	106 → 1	122 → 11	138 → 137	154 → 1	170 → 13	186 → 1	203 → 530 573 402

Figura 7.

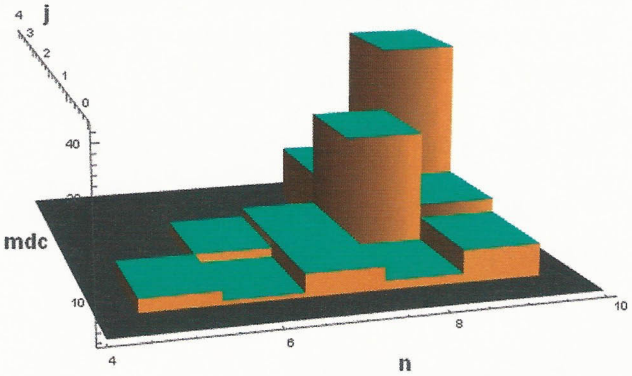

Figura 8.

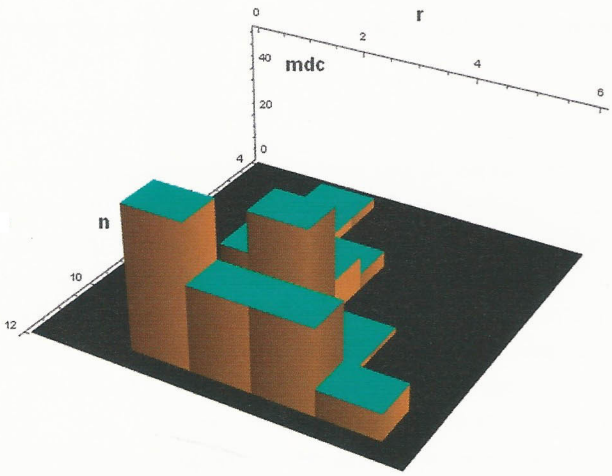

Figura 9.

(B) $\operatorname{mdc}\left\{\binom{n}{i}, \binom{n}{j} \colon 1 \leq i, j \leq n-1\right\}$.

Já sabemos que este máximo divisor comum é maior do que 1, mas não como ele varia com n, i e j. Na figura 8 está o gráfico da função

$$(n, j) \quad \mapsto \quad \operatorname{mdc}\left\{\binom{n}{j}, \binom{n}{j+1} \colon 1 \leq j \leq n-1\right\}$$

para naturais n entre 4 e 10, obtido com um módulo interativo que pode explorar-se em [2].

(C) $\operatorname{mdc}\left\{\binom{n}{j} \colon r \leq j \leq s\right\}$.

Para naturais $n \geq 4$, $r \geq 2$ e s tais que $2r \leq s \leq n$, o máximo divisor comum das entradas consecutivas da n-ésima linha do triângulo de Pascal entre as posições r e s é dado por

$$\operatorname{mdc}\left\{\binom{n}{r}, \ldots, \binom{n}{s}\right\} = \prod_{k=0}^{r-1} \operatorname{mdc}\left\{\binom{n-k}{1}, \ldots, \binom{n-k}{s}\right\}$$

(*cf.* [3]), podendo utilizar-se agora a igualdade (5) para obter cada fator do produto anterior. A figura 9 mostra a variação do máximo divisor comum

$$(n, r) \quad \mapsto \quad \operatorname{mdc}\left\{\binom{n}{j} \colon r \leq j \leq 2r\right\}$$

quando $5 \leq n \leq 12$, $r \geq 2$ e $2r < n$. Não é conhecida nenhuma fórmula para blocos gerais de entradas não consecutivas.

REFERÊNCIAS

[1] B. Ram. *Common factors of* $\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$. Indian Math. Club J. 1 (1909) 39-43.

[2] *http://www.atractor.pt/mat/triangulo_Pascal/*

[3] H. Joris, C. Oestreicher, J. Steinig. *The greatest common divisor of certain sets of binomial coefficients.* J. Number Theory 21:1 (1985) 101-119.

[4] S. Hong. *The greatest common divisor of certain binomial coefficients.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 354:8 (2016) 756--761.