No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu site *www.atractor.pt* .
Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

# FILAS DE DADOS

## Um jogo da exposição *Matemática Viva*, a explorar agora no portal do Atractor.

Na exposição *Matemática Viva*, criada pelo Atractor no ano 2000 e em exibição no Pavilhão do Conhecimento até 2010, havia um módulo (figura 1) contendo 56 dados, que podiam ser misturados pelo visitante e depois deslizados ordenadamente para uma zona alongada, criando uma fila de dados. De cada um, apenas se via a face de cima, dispondo-se assim de uma fila de 56 números ao acaso entre 1 e 6, cada número indicando quantas pintas eram visíveis no dado correspondente (figura 2). Bloqueada uma tal fila, o visitante devia agitar o módulo, obtendo com o dado isolado (figura 2) um dos números 1 a 6, chamemos-lhe $k_1$ ($k_1$=4 no caso da figura 2), e localizar o dado na posição $k_1$ da fila; chamando $k_2$ ($k_2$=6 no caso da figura 2) ao número de pintas desse dado, deveria depois avançar $k_2$ posições, obtendo-se um $k_3$ e assim sucessivamente. O processo terminava quando já só houvesse à direita um número de dados inferior ao número de pintas do dado a que se tinha chegado. Na figura 3 estão assinaladas a vermelho todas as posições de passagem, correspondentes à fila indicada, partindo da posição assinalada pelo dado à esquerda.

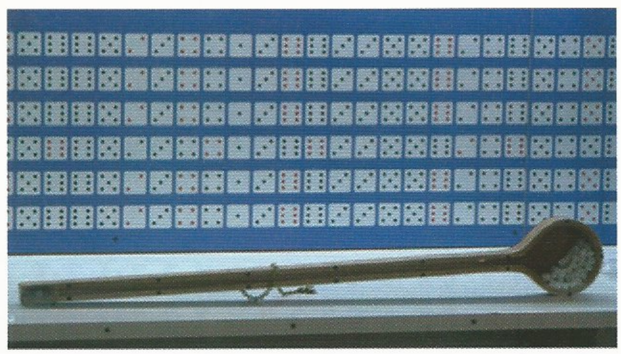

Figura 1.

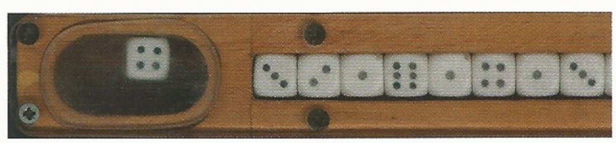

Figura 2.

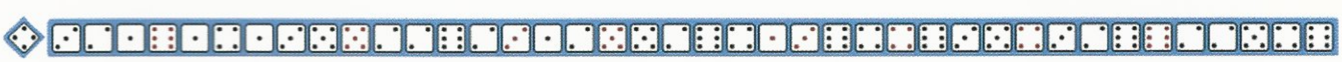

Figura 3.

Registado o dado final obtido pelo processo descrito, o visitante era convidado a lançar novamente o dado isolado e a recomeçar a partir da nova primeira posição. Em geral, os caminhos diferiam, embora pudessem chegar ao mesmo dado final. O objetivo deste jogo era observar precisamente o que se passava quanto às posições finais, ao seguir o processo descrito para os valores de partida $k_1$=1, 2,…, 6. E o que muitos visitantes da exposição puderam verificar foi que chegaram sempre à mesma última posição, independentemente de qual o valor obtido no lançamento inicial do dado isolado. No que se segue, analisaremos a razão para essa propriedade constatada experimentalmente.

Comecemos por notar que não é assim tão surpreendente que se chegue à mesma posição final. Observe-se a figura 4, onde estão assinaladas a vermelho, para uma mesma fila, as posições de passagem partindo sucessivamente das posições iniciais 1, 2, ... , 6. Quando duas trajetórias têm uma posição comum, claro que ambas as trajetórias coincidem a partir dessa posição comum. Portanto, para uma trajetória ter um último elemento diferente do das outras, é necessário que essa trajetória evite todas as posições de passagem de qualquer das outras, o que, se a fila for grande, é improvável que aconteça. Por outras palavras, esta observação parece indiciar que, para filas grandes, o caso típico será aquele em que todas as trajetórias terminem no mesmo elemento da fila. Dito isto, põe-se a questão de saber se há filas excecionais, em que essa unicidade do termo não se verifique, mesmo que a fila tenha milhares de dados. Na verdade, é fácil construir exemplos. Suponhamos que a fila só tem números pares (2, 4 ou 6) visíveis; então todos os elementos de uma trajetória conservam a paridade da posição do primeiro elemento: estão todos em posições de ordem par ou todos em posições de ordem ímpar. Na figura 5, todas as posições de passagem, assinaladas a vermelho, estão em posições ímpares na primeira imagem e na segunda imagem estão todas em posição par. Como em qualquer fila há três posições iniciais de ordem par (2, 4, 6) e três de ordem ímpar (1, 3, 5), haverá, para uma fila de números pares, por maior que seja o tamanho, três trajetórias que terminam numa posição de ordem par e três numa posição de ordem ímpar, logo, há pelo menos duas posições finais diferentes.

Designemos por *toc* as filas com todas as órbitas concorrentes. Como há seis posições possíveis de partida na fila, só interessam filas com, no mínimo, 6 dados. Das 46 656 (=$6^6$) filas existentes com 6 dados, é fácil concluir que só 720 são toc (e que todas terminam na sexta posição).

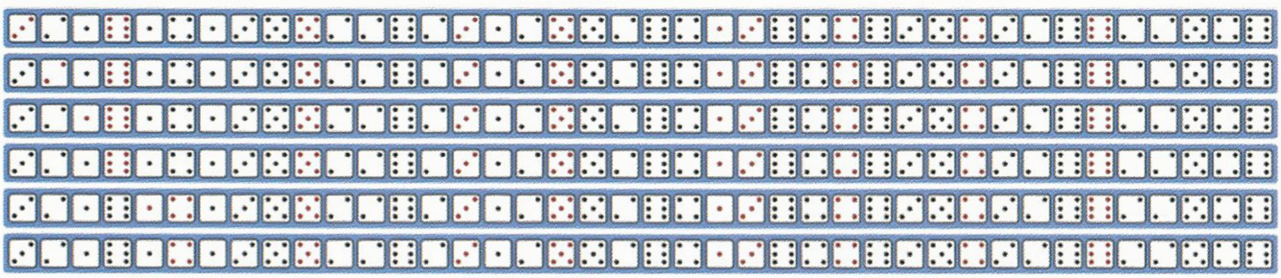

Figura 4.

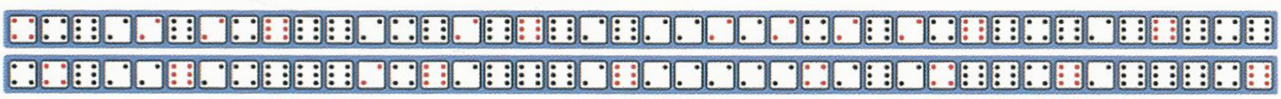

Figura 5.

| Comprimento da fila | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| N.° de filas | 46 656 | 279 936 | 1 679 616 | 10 077 696 | 60 466 176 |
| N.° de filas toc | 720 | 7 920 | 82 800 | 808 560 | 7 326 720 |
| Percentagem | 1.54321% | 2.82922% | 4.9297% | 8.02326% | 12.1171% |

Figura 6.

A tabela da figura 6 indica o número total de filas, o número das que são toc e as respetivas percentagens, quando o número de elementos da fila varia entre 6 e 10.

Para uma fila cujo número de elementos seja maior do que 10, o algoritmo usado para determinar todas as filas toc revelou-se demasiado lento. Para cada n > 10 foi feita, por isso, uma simulação[1], tendo-se obtido valores aproximados das percentagens das filas toc[2]. Na figura 7 encontra-se o gráfico desses valores aproximados das percentagens das toc para filas com comprimentos entre 6 e 80. Observe-se que a função é crescente e que, para filas

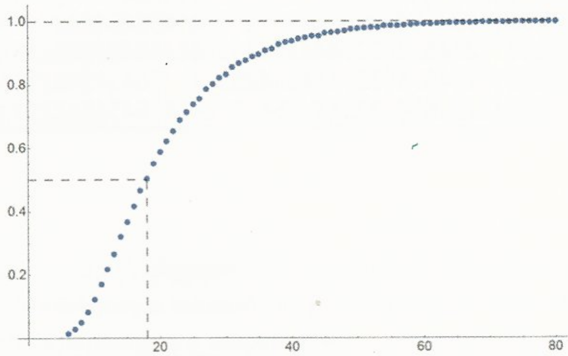


Figura 7

com 18 dados, há praticamente tantas que são toc como que o não são. Para filas mais longas, as que não são toc tornam-se mais raras, como se pode confirmar pela tabela da figura 8: para filas de 80 dados, a probabilidade de obter uma fila que não seja toc ronda apenas um em mil.

Em [1] estão disponíveis aplicações interativas (em formato CDF) que dão uma informação muito extensa sobre as filas de dados. Por exemplo, num quadro com as 720 filas toc de comprimento 6, ao sobrevoar com o rato cada linha, aparecerão as seis versões dessa linha com os pontos de passagem assinalados a cor. E também é possível obter aleatoriamente, para um comprimento escolhido, um quadro com um elevado número de filas de dados com esse comprimento (ver figura 9). No quadro dessa figura as linhas a azul correspondem às filas toc e as poucas a preto correspondem às não toc. Por exemplo, a primeira fila da primeira coluna não é toc, como o leitor poderá verificar, percorrendo-a segundo as regras a partir

[1] Por exemplo, para obter uma fila de 56 dados, escolheu-se aleatoriamente um número entre 1 e 6, 56 vezes seguidas. Procedendo-se a esta operação umas dezenas de milhares de vezes e calculando o número de filas assim obtidas que eram toc, obtiveram-se valores aproximados das respetivas percentagens.

| Comprimentos | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Percentagens | 2.3 | 2. | 1.9 | 1.9 | 1.5 | 1.4 | 1.4 | 1.3 | 1.1 | 0.9 | 0.9 | 0.9 | 0.7 | 0.7 | 0.6 | 0.6 | 0.5 | 0.4 | 0.4 | 0.4 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.1 | 0.1 |

Figura 8


Figura 9

das posições iniciais 1, 2, ..., 6. Na ocasião da gravação da imagem, o rato sobrevoava a fila imediatamente anterior à primeira preta (não toc) da segunda coluna do quadro. O retângulo destacado, que aparece bem visível, refere-se a essa linha e mostra os seis percursos, começando sucessivamente nas primeiras seis posições. Na 11.ª posição há um 3, a azul, que corresponde à primeira posição comum a todas as trajetórias; a última dessas posições comuns está representada a lilás e, por acaso, é mesmo a última da fila. Sobrevoando com o rato qualquer uma das outras filas desse quadro, apareceria em destaque informação análoga correspondente à fila sobrevoada. Por exemplo, a figura 10 mostra o destaque referente à fila preta imediatamente abaixo da anterior: não há aqui nenhum caminho comum até ao fim, embora as posições de passagem coincidam em todas as filas menos na terceira, a partir da posição 11. Depois desta posição, tudo se passa como se só houvesse dois caminhos a comparar: o terceiro e o comum às outras cinco.

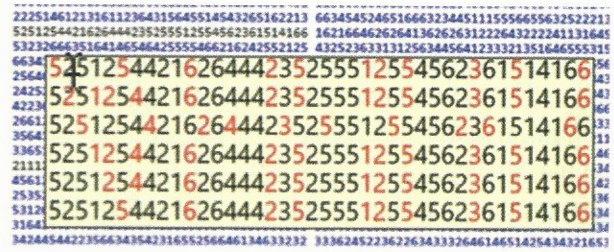


Figura 10

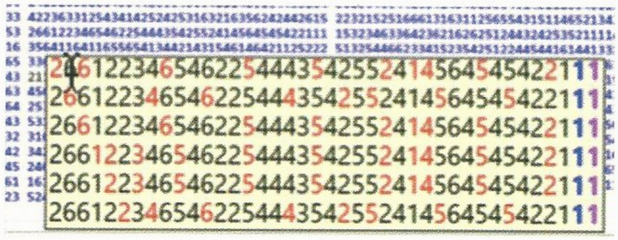


Figura 11

Uma outra observação pertinente relativamente às filas toc prende-se com a ordem da primeira posição comum a todos os caminhos: vimos que no exemplo destacado na figura 9 os caminhos se juntavam relativamente cedo (na posição 11 de uma fila de comprimento 40); a figura 11 mostra outra fila do mesmo quadro em que tal não sucede: só se juntam na penúltima posição. Estas diferenças de comportamento são facilmente detetáveis com representações adequadas. Por exemplo, algumas das aplicações desenvolvidas pelo Atractor a propósito deste problema incluem nos destaques a representação das filas por grafos circulares, permitindo uma forma muito simples e rápida de acesso à informação correspondente. A figura 12 mostra os dois grafos correspondentes às filas destacadas nas figuras 9 e 11. Na primeira imagem, as diferentes trajetórias juntam-se na posição 11 e a parte

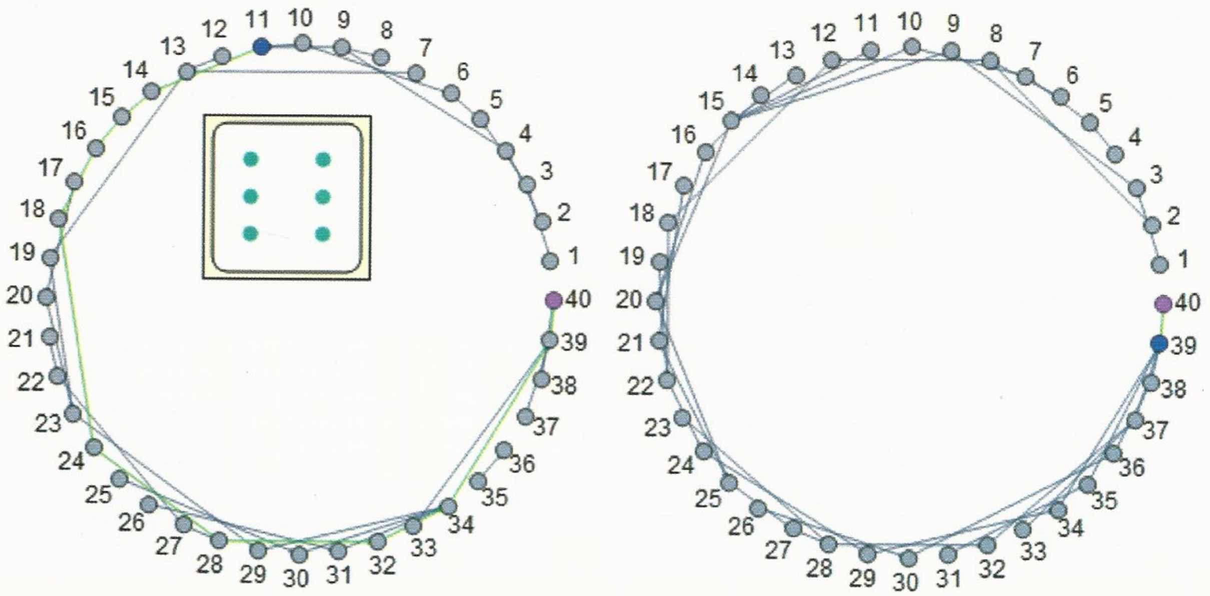

Figura 12

comum está assinalada a verde[3]. Na segunda, só se juntam na penúltima posição. Nas aplicações desenvolvidas pelo Atractor, é possível escolher[4] filas com números entre 2 e um número np (número de pintas) maior ou igual a 2, não necessariamente 6. A situação é, nalguns casos, bem diferente da que atrás foi descrita sobre o caso de o número máximo de pintas ser 6. Por exemplo, no caso de filas só de 1 e 2, para qualquer comprimento da fila, seja 2 ou 2 biliões, o número das filas que não são toc é sempre o mesmo: há (sempre) apenas duas filas com esse comprimento que não são toc. Do material obtido, indicamos na figura 13 uma tabela com os números de filas toc para dados com número de pintas *np* de 2 a 8 pintas (colunas) e filas de comprimento desde *np* até 8.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | | | |
| 6 | 6 | | | | | |
| 14 | 30 | 24 | | | | |
| 30 | 132 | 168 | 120 | | | |
| 62 | 492 | 1080 | 1080 | 720 | | |
| 126 | 1674 | 6216 | 9120 | 7920 | 5040 | |
| 254 | 5466 | 31 728 | 70 800 | 82 800 | 65 520 | 40 320 |

Figura 13

[1] *https://www.atractor.pt/mat/filadados*

[2] Os cálculos foram feitos também para os valores de 6 a 10 (aproximados a dois algarismos significativos) e os valores aproximados assim obtidos foram 1.5%, 3%, 5%, 8.1% e 12%, que constituem aproximações razoáveis dos valores indicados na última linha da tabela da figura 6.

[3] O dado com 6 pintas apareceu, porque o rato sobrevoava o vértice 13 do grafo, que na figura 9 correspondia a 6 pintas.

[4] Estas situações mais gerais também podem ser associadas a jogos. Usando um dado cúbico com igual número de pintas em faces opostas, podemos ter números 1, 2, 3, com igual probabilidade. Analogamente, se três faces tiverem uma pinta e as outras três tiverem duas, em cada lançamento teremos 1 ou 2 com igual probabilidade. Querendo um sistema que funcione para um certo número *np* (qualquer, maior ou igual a 3) de pintas, podemos colar pelas bases duas pirâmides regulares com *np* faces, colocando o mesmo número de pintas em duas faces quando elas estiverem em pirâmides diferentes e tiverem uma aresta comum.