

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu site www.atorator.pt. Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para atorator@atorator.pt.

FILAS DE DADOS

Um jogo da exposição *Matemática Viva*, a explorar agora no portal do Atractor.

Na exposição *Matemática Viva*, criada pelo Atractor no ano 2000 e em exibição no Pavilhão do Conhecimento até 2010, havia um módulo (figura 1) contendo 56 dados, que podiam ser misturados pelo visitante e depois deslizados ordenadamente para uma zona alongada, criando uma fila de dados. De cada um, apenas se via a face de cima, dispondo-se assim de uma fila de 56 números ao acaso entre 1 e 6, cada número indicando quantas pintas eram visíveis no dado correspondente (figura 2). Bloqueada uma tal fila, o visitante devia agitar o módulo, obtendo com o dado isolado (figura 2) um dos números 1 a 6, chamemos-lhe k_1 ($k_1=4$ no caso da figura 2), e localizar o dado na posição k_1 da fila; chamando k_2 ($k_2=6$ no caso da figura 2) ao número de pintas desse dado, deveria depois avançar k_2 posições, obtendo-se um k_3 e assim sucessivamente. O processo terminava quando já só houvesse à direita um número de dados inferior ao número de pintas do dado a que se tinha chegado. Na figura 3 estão assinaladas a vermelho todas as posições de passagem, correspondentes à fila indicada, partindo da posição assinalada pelo dado à esquerda.

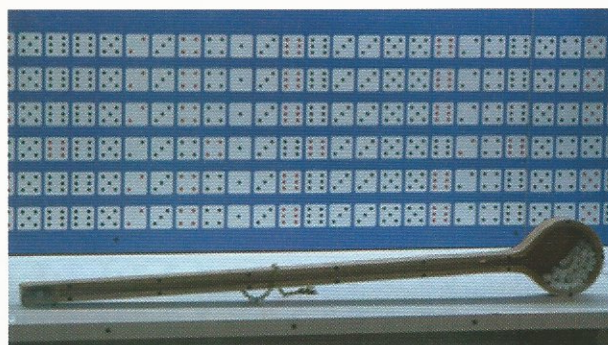


Figura 1.



Figura 2.



Figura 3.

Registado o dado final obtido pelo processo descrito, o visitante era convidado a lançar novamente o dado isolado e a recomeçar a partir da nova primeira posição. Em geral, os caminhos diferiam, embora pudessem chegar ao mesmo dado final. O objetivo deste jogo era observar precisamente o que se passava quanto às posições finais, ao seguir o processo descrito para os valores de partida $k_1=1, 2, \dots, 6$. E o que muitos visitantes da exposição puderam verificar foi que chegaram sempre à mesma última posição, independentemente de qual o valor obtido no lançamento inicial do dado isolado. No que se segue, analisaremos a razão para essa propriedade constatada experimentalmente.

Começemos por notar que não é assim tão surpreendente que se chegue à mesma posição final. Observe-se a figura 4, onde estão assinaladas a vermelho, para uma mesma fila, as posições de passagem partindo sucessivamente das posições iniciais 1, 2, ... , 6. Quando duas trajetórias têm uma posição comum, claro que ambas as trajetórias coincidem a partir dessa posição comum. Portanto, para uma trajetória ter um último elemento diferente do das outras, é necessário que essa trajetória evite todas as posições de passagem de qualquer das outras, o que, se a fila for grande, é improvável que aconteça. Por outras pala-

bras, esta observação parece indiciar que, para filas grandes, o caso típico será aquele em que todas as trajetórias terminem no mesmo elemento da fila. Dito isto, põe-se a questão de saber se há filas excepcionais, em que essa unicidade do termo não se verifique, mesmo que a fila tenha milhares de dados. Na verdade, é fácil construir exemplos. Suponhamos que a fila só tem números pares (2, 4 ou 6) visíveis; então todos os elementos de uma trajetória conservam a paridade da posição do primeiro elemento: estão todos em posições de ordem par ou todos em posições de ordem ímpar. Na figura 5, todas as posições de passagem, assinaladas a vermelho, estão em posições ímpares na primeira imagem e na segunda imagem estão todas em posição par. Como em qualquer fila há três posições iniciais de ordem par (2, 4, 6) e três de ordem ímpar (1, 3, 5), haverá, para uma fila de números pares, por maior que seja o tamanho, três trajetórias que terminam numa posição de ordem par e três numa posição de ordem ímpar, logo, há pelo menos duas posições finais diferentes.

Designemos por *toc* as filas com todas as órbitas concorrentes. Como há seis posições possíveis de partida na fila, só interessam filas com, no mínimo, 6 dados. Das 46 656 ($=6^6$) filas existentes com 6 dados, é fácil concluir que só 720 são *toc* (e que todas terminam na sexta posição).

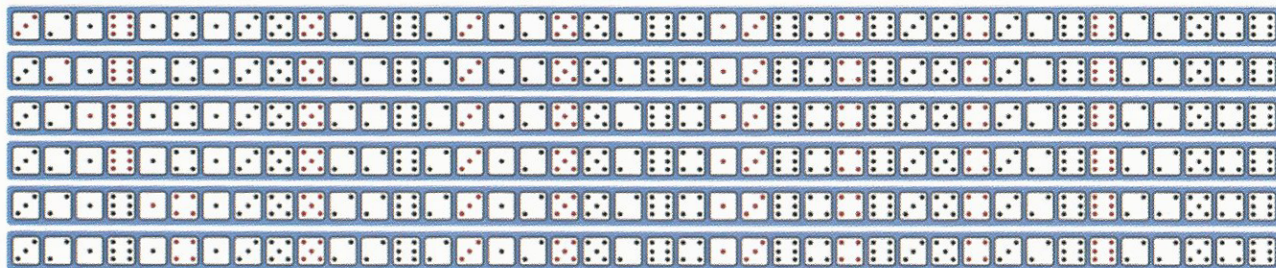


Figura 4.

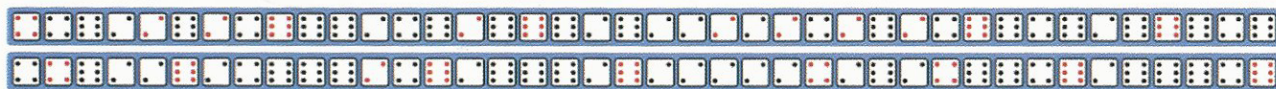


Figura 5.

Comprimento da fila	6	7	8	9	10
N.º de filas	46 656	279 936	1 679 616	10 077 696	60 466 176
N.º de filas toc	720	7 920	82 800	808 560	7 326 720
Percentagem	1.54321%	2.82922%	4.9297%	8.02326%	12.1171%

Figura 6.

A tabela da figura 6 indica o número total de filas, o número das que são toc e as respectivas percentagens, quando o número de elementos da fila varia entre 6 e 10.

Para uma fila cujo número de elementos seja maior do que 10, o algoritmo usado para determinar todas as filas toc revelou-se demasiado lento. Para cada $n > 10$ foi feita, por isso, uma simulação¹, tendo-se obtido valores aproximados das percentagens das filas toc². Na figura 7 encontra-se o gráfico desses valores aproximados das percentagens das toc para filas com comprimentos entre 6 e 80. Observe-se que a função é crescente e que, para filas

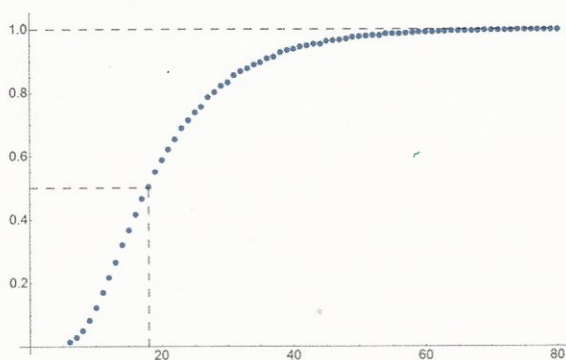


Figura 7

Comprimentos	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Percentagens	2.3	2.	1.9	1.9	1.5	1.4	1.4	1.3	1.1	0.9	0.9	0.9	0.7	0.7	0.6	0.6	0.5	0.4	0.4	0.4	0.3	0.3	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	

Figura 8

Nº de filas obtidas aleatoriamente: 90 Nº de dados da fila: 40 Nº de pintas dos dados: 6

```

3442133263663552654254632666244661664531 2225351334313222446431443111465323256535 4243621434256261464135663125153152651122 56563355646126223432344213643413435413
66224556221446165611462163643363156111 664436116553424444566321521622315562641 6133613551444344336643431646441515421262 26341154211236665423526333331511413421
4216366335141632324242125565642611361263 3142116335631263233466445652326165554264 3232436434354224352132442656132321441232 56215513513243412213432246245115256514
5443316126215462533645544565512635453435 633633616323212121365112242666213633452 113665166325566251254551542456346456244 612141435356225233564242623344236136521
214161546643135513223225533161422263 2225146121316112364315645514543265162213 663454524651666323445115546655632522213 1133413341342361643416164452421254566242
464534435164511352363231643334351345241 52512544216264443325531254562361514156 1623264626264136263212226422224131645 5113344241431363266422144323464255616113
4646252526645155121113436546213663246656 532326663514414654642555466216242552125 6634143266433254441236324562534351336526
51163345332541421261345425122261653364 6634143266433254441236324562534351336526
3555264644355145514512142544463652265156 2564612513613644235314122541652632611632
163454522151121553262634146562516634456 242526532164334426664566422142616465264
6643354666424655214225412263325411213233 4223633125434143524253163216356242442615
514645621464651435131454514636211652316253 264122465462254433542552414564545422111
26366345435142551655445232654134261116 356411641165664314421431546146421125222
435124224253532253245512164534343155295 336515235115614622232463162562564164212
3414266166164664231561643213542554352243 2111236221454113564166132355311626544643
544454261253522133251461236365441652563 4561231224641224161312165434215545244644
156541131632533145542552151314166111264 2535235313135542416415241242513361461255
3554411428536413541446462333633463246643 531263625254154612551223253264352346623
162164323542651615551231261335412426632 316424444464416213154221253534453335621 223466323261245445556456516163435331543 6121325414255156364121321243363412533433
26641416142326423464114111634124361542 3424454422356634542316552564613463232 333624523262263433264614651425434321653 4254325634121142216123621652513525623355
636112346526346522241126462512136536645 246213331152445345316366411154156624313 543236622326425412621362121114555266564 2665562244335163312252645114546611531662
4546236636216233335442212535264643561 161521654133415114526235365151455316413 5234116355225433116256515221623144411161 362132325352446551335211434365621615516
651526623243635662123622551261131525423 52444536645535432253145143263142421221536

```

Figura 9

com 18 dados, há praticamente tantas que são toc como que o não são. Para filas mais longas, as que não são toc tornam-se mais raras, como se pode confirmar pela tabela da figura 8: para filas de 80 dados, a probabilidade de obter uma fila que não seja toc ronda apenas um em mil.

Em [1] estão disponíveis aplicações interativas (em formato CDF) que dão uma informação muito extensa sobre as filas de dados. Por exemplo, num quadro com as 720 filas toc de comprimento 6, ao sobrevoar com o rato cada linha, aparecerão as seis versões dessa linha com os pontos de passagem assinalados a cor. E também é possível obter aleatoriamente, para um comprimento escolhido, um quadro com um elevado número de filas de dados com esse comprimento (ver figura 9). No quadro dessa figura as linhas a azul correspondem às filas toc e as poucas a preto correspondem às não toc. Por exemplo, a primeira fila da primeira coluna não é toc, como o leitor poderá verificar, percorrendo-a segundo as regras a partir

¹ Por exemplo, para obter uma fila de 56 dados, escolheu-se aleatoriamente um número entre 1 e 6, 56 vezes seguidas. Procedendo-se a esta operação umas dezenas de milhares de vezes e calculando o número de filas assim obtidas que eram toc, obtiveram-se valores aproximados das respectivas percentagens.

das posições iniciais 1, 2, ..., 6. Na ocasião da gravação da imagem, o rato sobrevoava a fila imediatamente anterior à primeira preta (não toc) da segunda coluna do quadro. O retângulo destacado, que aparece bem visível, refere-se a essa linha e mostra os seis percursos, começando sucessivamente nas primeiras seis posições. Na 11.^a posição há um 3, a azul, que corresponde à primeira posição comum a todas as trajetórias; a última dessas posições comuns está representada a lilás e, por acaso, é mesmo a última da fila. Sobrevoando com o rato qualquer uma das outras filas desse quadro, apareceria em destaque informação análoga correspondente à fila sobrevoada. Por exemplo, a figura 10 mostra o destaque referente à fila preta imediatamente abaixo da anterior: não há aqui nenhum caminho comum até ao fim, embora as posições de passagem coincidam em todas as filas menos na terceira, a partir da posição 11. Depois desta posição, tudo se passa como se só houvesse dois caminhos a comparar: o terceiro e o comum às outras cinco.

Uma outra observação pertinente relativamente às filas toc prende-se com a ordem da primeira posição comum a todos os caminhos: vimos que no exemplo destacado na figura 9 os caminhos se juntavam relativamente cedo (na posição 11 de uma fila de comprimento 40); a figura 11 mostra outra fila do mesmo quadro em que tal não sucede: só se juntam na penúltima posição. Estas diferenças de comportamento são facilmente detetáveis com

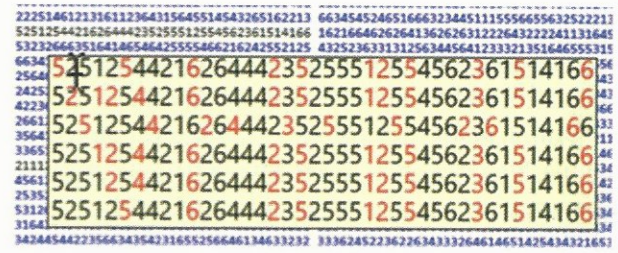


Figura 10

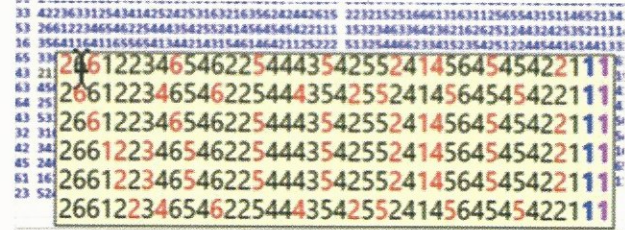


Figura 11

representações adequadas. Por exemplo, algumas das aplicações desenvolvidas pelo Atractor a propósito deste problema incluem nos destaques a representação das filas por grafos circulares, permitindo uma forma muito simples e rápida de acesso à informação correspondente. A figura 12 mostra os dois grafos correspondentes às filas destacadas nas figuras 9 e 11. Na primeira imagem, as diferentes trajetórias juntam-se na posição 11 e a parte

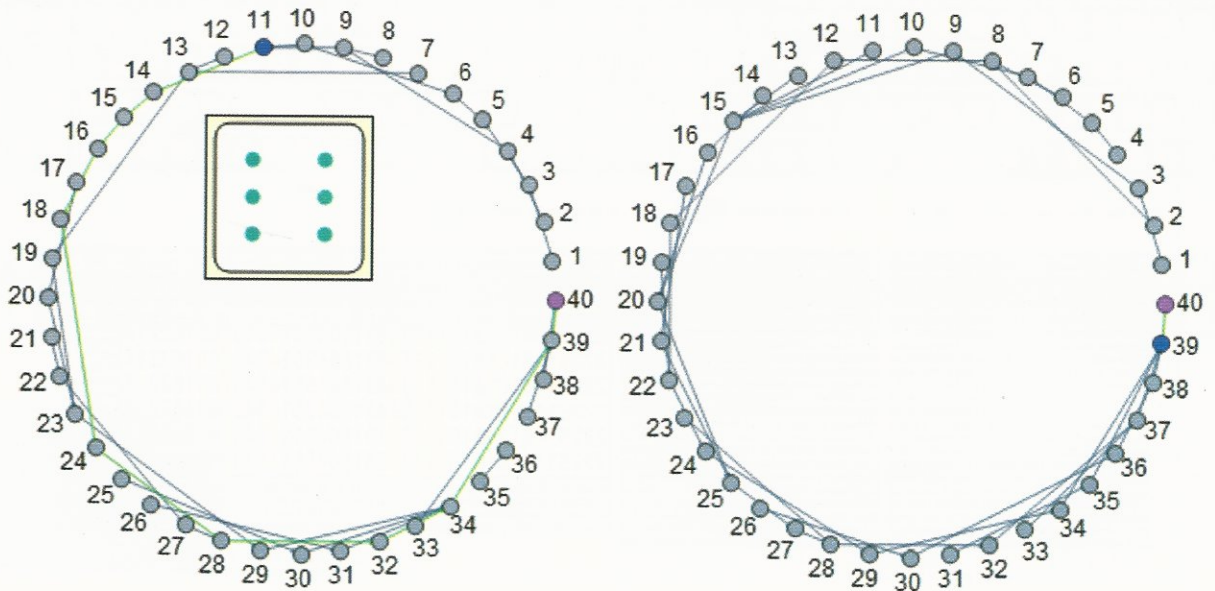


Figura 12

comum está assinalada a verde³. Na segunda, só se juntam na penúltima posição. Nas aplicações desenvolvidas pelo Atractor, é possível escolher⁴ filas com números entre 2 e um número np (número de pintas) maior ou igual a 2, não necessariamente 6. A situação é, nalguns casos, bem diferente da que atrás foi descrita sobre o caso de o número máximo de pintas ser 6. Por exemplo, no caso de filas só de 1 e 2, para qualquer comprimento da fila, seja 2 ou 2 biliões, o número das filas que não são toc é sempre o mesmo: há (sempre) apenas duas filas com esse comprimento que não são toc. Do material obtido, indicamos na figura 13 uma tabela com os números de filas toc para dados com número de pintas np de 2 a 8 pintas (colunas) e filas de comprimento desde np até 8.

2						
6	6					
14	30	24				
30	132	168	120			
62	492	1080	1080	720		
126	1674	6216	9120	7920	5040	
254	5466	31728	70800	82800	65520	40320

Figura 13

[1] <https://www.atractor.pt/mat/filadados>

² Os cálculos foram feitos também para os valores de 6 a 10 (aproximados a dois algarismos significativos) e os valores aproximados assim obtidos foram 1.5%, 3%, 5%, 8.1% e 12%, que constituem aproximações razoáveis dos valores indicados na última linha da tabela da figura 6.

³ O dado com 6 pintas apareceu, porque o rato sobrevoava o vértice 13 do grafo, que na figura 9 correspondia a 6 pintas.

⁴ Estas situações mais gerais também podem ser associadas a jogos. Usando um dado cúbico com igual número de pintas em faces opostas, podemos ter números 1, 2, 3, com igual probabilidade. Analogamente, se três faces tiverem uma pinta e as outras três tiverem duas, em cada lançamento teremos 1 ou 2 com igual probabilidade. Querendo um sistema que funcione para um certo número np (qualquer maior ou igual a 3) de pintas, podemos colar pelas bases duas pirâmides regulares com np faces, colocando o mesmo número de pintas em duas faces quando elas estiverem em pirâmides diferentes e tiverem uma aresta comum.

QUER SER SÓCIO DA SPM?

CONSTRUA UMA
BANDA DE MÖBIUS
COM ESTA PÁGINA

COMO SER SÓCIO DA SPM

Para ser Sócio SPM basta preencher o formulário online, escolher a modalidade de quota e a forma de pagamento.

JÁ FOI SÓCIO E QUER VOLTAR A SER?

Faça a adesão ao pagamento por débito direto e apenas pagará as quotas em atraso dos últimos dois anos. Contacte-nos!

VALOR DE QUOTAS 2019:

Sócio Efetivo: 40 euros

Sócio Estudante: 20 euros
(até aos 25 anos ou até aos 30 mediante comprovativo de frequência de mestrado).

Institucionais

Escolar: 80 euros
Académico: 400 euros
Corporativo: 600 euros

CARTÃO DIGITAL DE SÓCIO SPM

A partir de agora, todos os sócios da SPM podem descarregar o seu cartão digital de sócio através da sua área pessoal. Deste modo, terão sempre disponíveis os seus cartões atualizados.

VANTAGENS DOS SÓCIOS SPM:

- recebem gratuitamente a *Gazeta de Matemática* (quadrimestral) e o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* (semestral).
- desconto na Loja (10% ou mais), nos eventos e ações do Centro de Formação SPM
- desconto de 50% no Pavilhão do Conhecimento
- desconto nos Livros IST Press e na Livraria Piaget de 30%.

spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

INFORMAÇÕES

Av. da República, 45 3.º esq
1050-187 - Lisboa

Tel.: 217 939 785
E-mail: spm@spm.pt

www.spm.pt

