

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o *Atractor*, este é um espaço da responsabilidade do *Atractor*, relacionado com conteúdos interativos do seu site www.atorator.pt.
Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para atorator@atorator.pt

DINÂMICA DA FUNÇÃO GAMA DE EULER

A função gama, cuja origem está ligada à interpolação de funções e ao cálculo integral, tem sido essencial em inúmeros capítulos da História da Matemática. Esboçaremos aqui o seu perfil dinâmico.

Considere a seguinte tabela de valores da função fatorial:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
n!	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	...

Se inserirmos 1/2 na primeira linha entre 0 e 1, que valor devemos associar-lhe na segunda linha de modo a interpolar a função fatorial nesse valor intermédio? Há inúmeras maneiras de o fazer, por isso convém ser mais preciso na pergunta. No tempo de Euler, a quem a questão foi colocada, uma função era sinónimo de uma expressão analítica que deveria envolver as operações algébricas elementares, somas ou produtos infinitos, ou os operadores usuais de derivação ou integração. Procuramos, portanto, uma fórmula que, quando estimada nos números naturais, forneça por ordem os valores dos fatoriais, e que também atribua um valor a 1/2. Ainda assim, a resposta não é única, mas a de Euler, numa carta a Goldbach em 1729, foi inequívoca: $(1/2)! = \sqrt{\pi}/2$. O que significa e que importância tem esta resposta?

O problema prático de interpolação a partir da fórmula de recorrência dos fatoriais dos números naturais esteve na origem de uma função, hoje designada Γ , cuja definição Euler publicou num artigo de 1729 com o título (tradução a partir de [1]). "Sobre progressões transcenden-

tes cujo termo geral não pode ser expresso algebricamente." A função que Euler criou tem domínio \mathbb{R}^+ , vale 1 em 1 e satisfaz a equação

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad \forall x > 0 \quad (1)$$

de onde se deduz a recorrência

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Não se trata, portanto, de um prolongamento da função fatorial mas de uma função cujo gráfico passa por todos os pontos $(n, (n - 1)!)$ com $n \in \mathbb{N}$. Para interpolarmos a função fatorial e juntarmos à tabela anterior o valor em 1/2, basta considerar a função

$$x \geq 0 \mapsto f(x) = \Gamma(x + 1)$$

que em 1/2 vale $f(1/2) = \Gamma(3/2)$. Note-se que, uma vez encontrada a função Γ , também $x \mapsto \Gamma(x) + 0,8 \sin(\pi x)$ e $x \mapsto \Gamma(x) (1 + 0,8 \sin(2\pi x))$ satisfazem a igualdade (2) - ver figura 6, no final do texto. A figura 7 mostra os gráficos dos logaritmos das três funções da figura 6. Sabe-se hoje, porém, que só pode existir uma função $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que verifique as três condições seguintes:

- (a) $\varphi(x + 1) = x\varphi(x) \quad \forall x > 0$
- (b) $\varphi(1) = 1$
- (c) $\log \varphi$ é convexa.

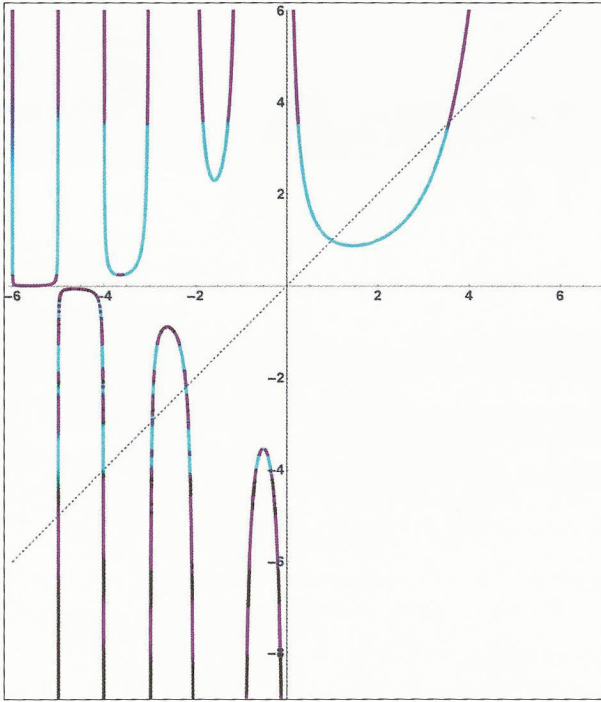


Figura 1.

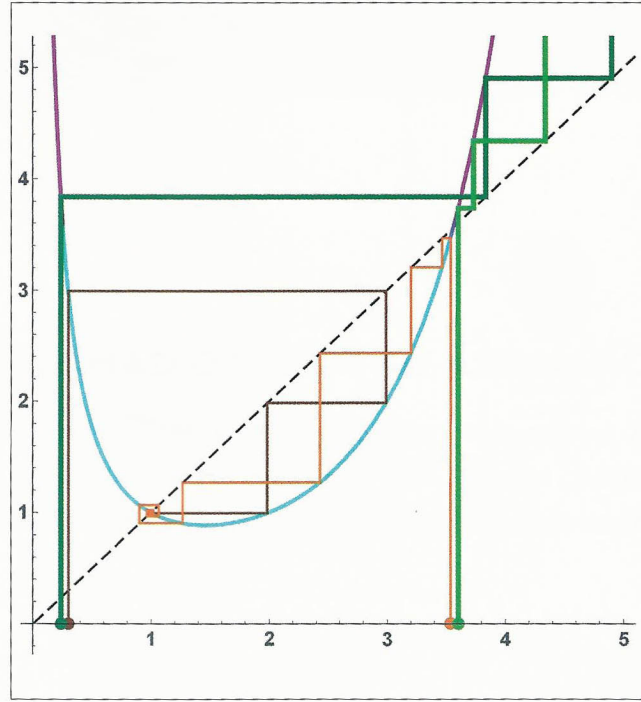


Figura 2.

Pode ler-se em [2] uma demonstração desta afirmação.

A propriedade (1) permite calcular a função Γ se se conhecerem os valores que toma em $]0, 1]$, uma vez que (1) implica que

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1) \cdots (x+1)x\Gamma(x) \quad \forall 0 < x \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Mas impede que possamos estendê-la de modo contínuo a 0, pois obteríamos $\Gamma(1) = 1 = 0 \times \Gamma(0) = 0$. Admite, todavia, um prolongamento a $\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}^-$, e essa extensão, além de continuar a verificar (1), tem a seguinte relação com a função seno

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)} \quad \forall x \notin \mathbb{Z}$$

que é útil para o cálculo de imagens de Γ . Por exemplo, dela resulta que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ logo, usando (1), que $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$. A figura 1 mostra um esboço do gráfico de Γ e da sua interseção com a linha reta de equação $y = x$ (a tracejado).

No que se segue, analisaremos o comportamento assintótico das sucessões $(\Gamma^m(x))_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, onde $\Gamma^1 = \Gamma$ e $\Gamma^{m+1} = \Gamma \circ \Gamma^m$, para os valores de x em que estas sucessões (também chamadas *órbitas* de Γ) estejam bem definidas.

Comecemos pelas órbitas mais simples, os pontos fixos de Γ . A figura 1 sugere que existe um conjunto numerável de pontos fixos, dois em \mathbb{R}^+ e mais dois em cada intervalo $] -2k - 1, -2k[$, $k \in \mathbb{N}$. Observe-se, porém, que os pontos fixos 1 e $\beta \in]3, 4[$ têm uma natureza distinta. O ponto fixo 1 é atrator pois sabe-se que a derivada $\Gamma'(1) = -\gamma$, onde $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \log n) \sim 0,6$; pelo contrário, β é repulsor, com $\Gamma'(\beta) > 4$. A figura 2 mostra parte de quatro órbitas, duas delas atraídas para 1.

A dinâmica de Γ em \mathbb{R}^+ é fácil de descrever. Se x pertence ao intervalo $] \alpha, \beta[$, onde α é o único real positivo de $]0, 1[$ cuja imagem por Γ é β , então a órbita de x converge para 1. Pelo contrário, se $x > 0$ está no complementar do intervalo $[\alpha, \beta]$, então a sua órbita tende para $+\infty$. Uma aproximação da bacia de atração de 1 (definida como o conjunto de pontos cujas órbitas convergem para 1) é dada pelas abscissas dos pontos do gráfico de Γ coloridos a azul. Para as abscissas dos pontos neste gráfico coloridos a roxo ou a castanho, essas sucessões ou não estão definidas (é o caso de $x_0 \in] -3, -2[$ tal que $\Gamma(x_0) = -2$), ou convergem para o ponto fixo β (como a órbita de β e as das suas infinitas pré-imagens por Γ), ou tendem para $+\infty$ (como acontece com $x_1 = 4$), ou têm outro comportamento que ainda precisamos de descobrir.

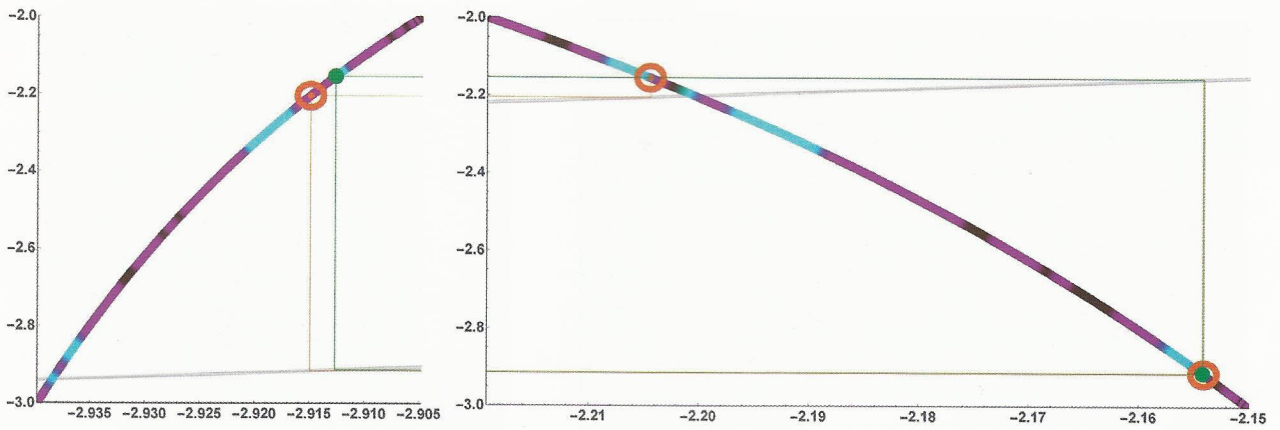


Figura 3.

A figura 1 parece indicar também que a dinâmica mais relevante da função Γ ocorre em $\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}^-$. Interessam-nos os pontos de $\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}^-$ cujas órbitas são limitadas e não passam por \mathbb{R}^+ . Terá Γ outros atratores além do ponto fixo 1? Analisemos, por exemplo, o que se passa no intervalo $]-3, -2[$. Aqui há dois pontos fixos (e só dois) que são repulsores, e dois intervalos disjuntos $I = [a_1, a_2]$ e $J = [b_1, b_2]$ tais que $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$, $\Gamma(a_1) = -3 = \Gamma(b_2)$, $\Gamma(a_2) = -2 = \Gamma(b_1)$, $\Gamma(I) = [-3, -2] = \Gamma(J)$ e as restrições de Γ a I e a J são homeomorfismos. Na figura 3 podem ver-se os intervalos I e J ampliados, os gráficos das restrições a $I \cup J$ de Γ e da função identidade, além de duas órbitas periódicas, uma de período 2 e outra de período 3.

O conjunto $\Lambda = \bigcap_{j=0}^{+\infty} \Gamma^{-j}(I \cup J)$, dos pontos de $I \cup J$ cujas órbitas não saem desta união, é não vazio (por ser interseção encaixada de compactos não vazios) e invariante pela dinâmica (isto é, $\Gamma(\Lambda) \subseteq \Lambda$). E nele há pontos periódicos (repulsores) de todos os períodos, que até formam um subconjunto denso. Vejamos porquê. Atribuíamos a cada ponto $x \in \Lambda$ uma sucessão $(\tau_n(x))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ que descreve o itinerário da órbita de x na partição $I \cup J$, definida por

$$n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mapsto \tau_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \Gamma^n(x) \in I \\ 1 & \text{se } \Gamma^n(x) \in J. \end{cases}$$

Seja Σ_2 o espaço das sucessões $(x_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ tais que $x_n \in \{0, 1\}$ para todo o $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. A função $\mathcal{I}t : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$, que a cada $x \in \Lambda$ associa $(\tau_n(x))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, está bem definida porque $I \cap J = \emptyset$ e as órbitas de pon-

tos de Λ não saem de $I \cup J$. Além disso, o mínimo do valor absoluto da derivada de Γ em $I \cup J$ é maior do que 1, o que induz um afastamento por ação de Γ das condições iniciais em $I \cup J$ que estejam suficientemente perto, impedindo a existência de dois pontos distintos de Λ cujas órbitas tenham o mesmo itinerário na partição $I \cup J$. Com estas propriedades, pode provar-se que $\mathcal{I}t$ é uma bijeção e que, se em $I \cup J$ considerarmos a distância euclidiana e em Σ_2 a distância

$$d((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n},$$

então $\mathcal{I}t$ é um homeomorfismo. Note-se ainda que, para cada $x \in \Lambda$,

$$\tau_n(\Gamma|_{\Lambda}(x)) = \tau_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

isto é, $\mathcal{I}t \circ \Gamma|_{\Lambda} = \sigma \circ \mathcal{I}t$, onde $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ é a transformação $\sigma((x_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$. Deste modo, a informação dinâmica que conhecemos sobre σ transfere-se para a restrição de Γ a Λ . Por exemplo, se z é um ponto periódico de período k de σ , então $\mathcal{I}t^{-1}(z)$ é periódico por $\Gamma|_{\Lambda}$ com igual período. Ora, é imediato construir pontos periódicos de período k por σ : basta considerar um bloco de k dígitos de $\{0, 1\}$ (e há 2^k escolhas de tais blocos) e repeti-lo indefinidamente para formar uma sucessão cuja órbita por σ é periódica de período k . É fácil demonstrar que o conjunto de pontos periódicos de σ é denso em Σ_2 , propriedade que é levada pelo homeomorfismo $\mathcal{I}t^{-1}$ para os pontos periódicos de $\Gamma|_{\Lambda}$ em Λ .

Localizar com mais precisão essas órbitas periódicas de Λ não é, porém, tarefa elementar. O Atractor desenvolveu um módulo interativo (para a sua utilização,

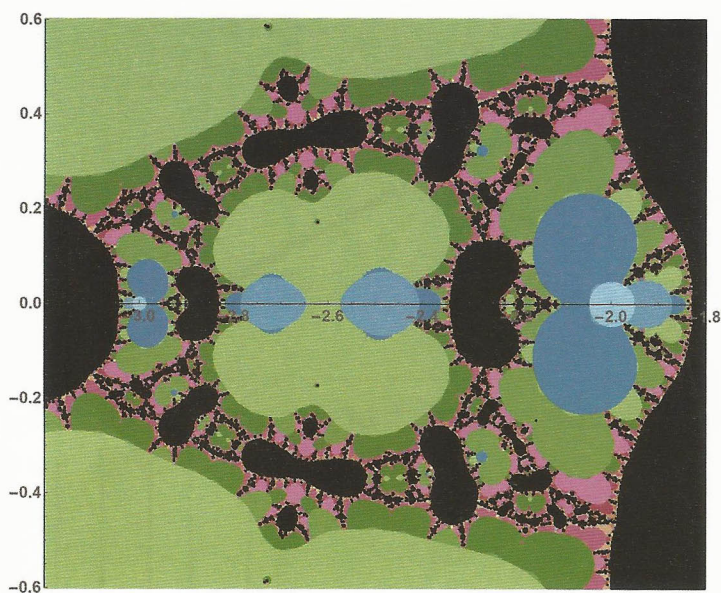


Figura 4.

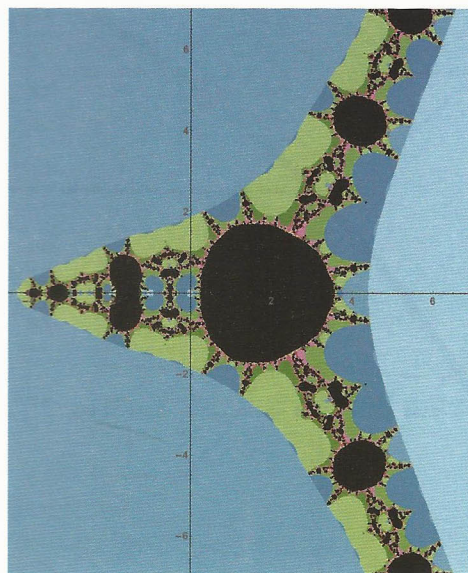


Figura 5.

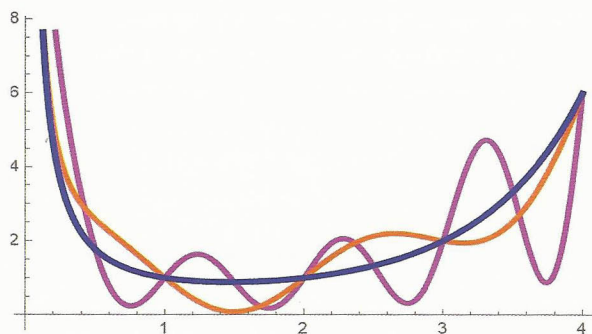


Figura 6.

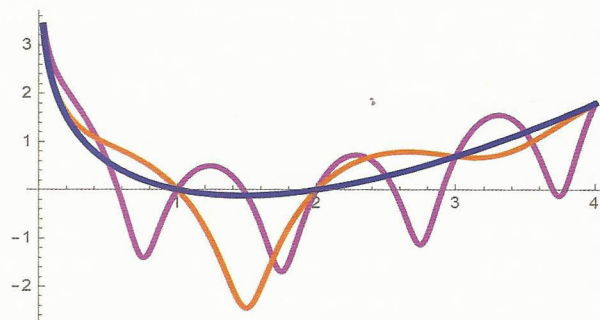


Figura 7.

consulte-se [2]) com que obteve aproximações como as da figura 3. O recurso a uma extensão complexa da função Γ , que Gauss provou existir e que tem apenas polos em $\mathbb{Z}^- \times \{0\}$, permite ter uma ideia mais fiável da posição relativa de algumas órbitas. As figuras 4 e 5 mostram aproximações do conjunto de órbitas limitadas desta extensão complexa da função Γ em duas vizinhanças no plano de $] -3, -2[\times \{0\}$; a região escura corresponde aproximadamente a pontos na bacia de atração de $\{1\}$. Num próximo artigo voltaremos a estas imagens para explorarmos a informação que elas sugerem.

[1] L. Euler. *Opera Omnia*, I_{14} , 1-24

[2] https://www.atractor.pt/mat/dinamica_gama