A Geometria do Planeta Terra

No âmbito da iniciativa *Matemática do Planeta Terra 2013,* a Associação Atractor e o Núcleo do Porto da Associação de Professores de Matemática propõem a realização de um conjunto de tarefas sobre Geometria Esférica. O estudo desta geometria pode permitir a resolução de problemas ligados ao planeta Terra: por exemplo, na época dos Descobrimentos, era muito importante saber qual o caminho mais curto entre dois locais do planeta e qual a rota que se deveria seguir. Mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores deverão ter conhecimentos sobre Geometria Esférica. Esta geometria difere em vários aspetos da Geometria Euclidiana e, nestas tarefas, pretende-se iniciar o seu estudo bem como explorar algumas dessas diferenças. O trabalho proposto, de caráter exploratório, recorre a materiais manipuláveis e a ambientes de geometria dinâmica que proporcionam uma melhor visualização e compreensão de determinadas propriedades, facilitando a formulação de conjeturas e desenvolvendo a capacidade de resolução de problemas.

ATRACTOR
www.atractor.pt

APM
Associação de Professores de Matemática

Ano lectivo 2012/2013

Conteúdo

Na página http://atractor.pt/mat/GeomEsf encontra-se um trabalho sobre Geometria Esférica, elaborado sob a orientação do Atractor, no âmbito de uma bolsa atribuída pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia para ações de divulgação matemática junto da Associação Atractor. Esse trabalho integra componentes interativas em formato CDF, preparadas com o programa *Mathematica* e cujos ficheiros (disponíveis em http://atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino) são utilizados neste projeto numa colaboração entre a Associação Atractor e o Núcleo do Porto da APM. Para a utilização destes ficheiros, deve estar instalado no computador o *Wolfram CDFPlayer*, que pode ser importado sem encargos a partir de http://www.wolfram.com/cdf-player/.

NOTA HISTÓRICA

"E quem desta maneira andar irá caminhar direito." Pedro Nunes (1502-1578)

A esfera pode ser considerada um modelo (simplificado[1]) do planeta Terra e existe uma geometria que se dedica ao seu estudo: a Geometria Esférica. O estudo da Geometria Esférica, principalmente o relacionado com triângulos esféricos, é muito antigo e foi sendo desenvolvido ao longo dos séculos devido à sua grande aplicabilidade à Astronomia e à Navegação. O português Pedro Nunes foi um dos matemáticos que se notabilizou nesta área tendo descoberto uma curva que, na época dos Descobrimentos, gerou alguma controvérsia: a curva loxodrómica. Mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores têm que ter conhecimentos sobre Geometria Esférica (Alexander, 2004 [1]).

Apesar de muitos resultados da Geometria Esférica serem conhecidos desde a Antiguidade, enquanto sistema axiomático, este tipo de geometria só foi formalizado no séc. XIX após a descoberta das geometrias não Euclidianas. Estas geometrias surgiram no desenlace da longuíssima história do famoso 5º Postulado de Euclides, mais conhecido pelo Postulado das Paralelas. Ao longo dos séculos, foram várias as tentativas de provar este postulado a partir dos restantes, ou então de o substituir por outro mais simples. Um dos axiomas equivalentes que é usado nos livros modernos foi dado por Playfair: *dado um ponto P que não está numa reta r, existe uma só reta no plano de P e r que contém P e que não interseta r*. (Kline, 1972 [3])

No início do século XIX, alguns matemáticos, incluindo o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), notaram que o Postulado das Paralelas não poderia ser provado nem como verdadeiro nem como falso com base nos outros postulados da Geometria Euclidiana, ou seja, o Postulado das Paralelas seria independente dos restantes. Seria então possível desenvolver uma nova geometria a partir de um sistema axiomático que contivesse uma alternativa ao Postulado das Paralelas. Mas foram Lobatschewski (1792-1856) e János Bolyai (1802-1860) que, de forma independente, publicaram pela primeira vez os resultados de uma nova geometria não Euclidiana (Rosenfeld, 1976 [4]), conhecida atualmente por Geometria Hiperbólica. A Geometria Hiperbólica obtém-se substituindo o Postulado das Paralelas pelo Axioma Hiperbólico: *dada uma reta e um ponto exterior à reta, existem, pelo menos, duas retas distintas contendo o ponto dado e paralelas à reta dada.* Na Geometria Esférica, o Postulado das Paralelas é substituído pelo Axioma Elíptico: *dada uma reta e um ponto exterior à reta, não existe nenhuma reta contendo o ponto dado e paralela à reta dada.*

Bernhard Riemann (1826-1866) foi o primeiro a reconhecer a Geometria Esférica como um tipo de geometria não Euclidiana onde não existem retas paralelas. (Coxeter, 1998 [2])

A descoberta das geometrias não Euclidianas teve consequências muito importantes, quer matemáticas quer filosóficas, principalmente no que diz respeito aos fundamentos da matemática.

[1] Na verdade, o planeta Terra pode ser modelado por um elipsoide: o raio da Terra varia entre, aproximadamente, 6357 Km nos polos e 6378 Km na linha do Equador.

Referências

[1] ALEXANDER, James - *Loxodromes: A Rhumb Way to Go.* Mathematics Magazine, Vol. 77, n.º 5, December 2004, pp. 349 - 356.

[2] COXETER, H. S. M. - *Non-Euclidean Geometry*. Cambridge University Press, 1998.

[3] KLINE, Morris - *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times, Volume 3.* Oxford University Press, 1972.

[4] ROSENFELD, B. A. - *A History of Non-Euclidean Geometry.* New York: Springer-Verlag New York Inc., 1988. Translation of *Istoriya Neevklidovoi Geometrii.* Moscow: Nauka, 1976.

1º CICLO | **1º e 2º anos**

Tarefa

Planificação

PROPÓSITO PRINCIPAL DE ENSINO
Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na análise comparativa de propriedades de figuras geométricas construídas sobre superfície planas e sobre superfícies esféricas.

Tópicos / Subtópicos	Objetivos	Vocabulário
Geometria		Plano Curvo Superfície Esfera Reta Segmento de reta
Figuras geométricas • Linhas retas e curvas	• Identificar linhas retas e curvas a partir da observação de objetos e de figuras geométricas. • Verificar que, no plano, o "caminho" mais curto entre dois pontos se faz sobre uma reta (é um segmento de reta). • Verificar que, na superfície esférica, qualquer "caminho" entre dois pontos se faz inevitavelmente sobre uma curva.	
Capacidades transversais		
Raciocínio • Justificação • Argumentação **Comunicação** • Expressão • Discussão	• Explicar e justificar processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos. • Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito. • Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.	

PRÉ-REQUISITOS
Conhecer os seguintes aspetos da história do Principezinho: era um menino que vivia num planeta muito pequenino e que viajou até à Terra, tendo aterrado no deserto; tinha uma rosa e tentava, a todo o custo, protegê-la do perigo de ser comida por uma ovelha.

RECURSOS
Uma caixa retangular com areia, para simular o deserto; esfera de esferovite; bonecos (por exemplo, recortados, pin-y-pon ou legos) com altura aproximadamente igual ao raio da esfera, para simular o Principezinho; boneco para simular a ovelha; alfinetes marcadores; cordel, elásticos ou plasticina.

DURAÇÃO PREVISTA
60 a 90 minutos.

DESENVOLVIMENTO DA TAREFA

O ponto de partida será dado pela observação das figuras seguintes:

(a)

(b)

1. **Questões:**

   - (Mostrar a Figura (a)) *Quem está representado nesta figura? E onde?*

   - *É uma imagem do Principezinho no seu planeta.*

   - (Mostrar a Figura (b)) *E nesta figura, onde estará o Principezinho? Será que está no seu planeta?*

   - *Não, essa é uma imagem do Principezinho no deserto.*

   - *Como podem ter a certeza?*

   É previsível que os alunos deem respostas do tipo *"Tem areia, o céu é muito azul"*; interessa conduzir o diálogo no sentido de levar os alunos a distinguir que no deserto o Principezinho se encontra sobre uma superfície aproximadamente plana, ao passo que no seu planeta o Principezinho está sobre uma superfície curva.

2. **Manipulação de materiais (I):**

   - *Temos então aqui um Principezinho e uma caixa com areia: vamos imaginar que é o deserto. Escolham o ponto onde querem colocar o Principezinho.*

   Os alunos deverão colocar a figura do Principezinho num ponto qualquer (se se entender adequado, poder-se-á designar este ponto por ponto P).

   - *Muito bem! Ora se bem se lembram, no seu planeta o Principezinho tinha uma rosa de que ele gostava muito e que era a sua grande preocupação... Imaginem só o espanto do Principezinho quando, ao olhar à sua volta no deserto, viu ao longe... uma rosa!*

   Nessa altura, a professora irá colocar um alfinete marcador cor-de-rosa num ponto qualquer do "deserto", desde que afastado do ponto P (se adequado, poder-se-á designar este ponto por ponto R).

   - *Claro que o principezinho meteu logo pés ao caminho para ir ver a rosa... Como nos desertos não há estradas, o Principezinho podia passear à vontade por onde quisesse – eu posso imaginar que ele se lembrou de fazer um caminho assim* (a professora traça um caminho intencionalmente mais complexo e longo do que o necessário):

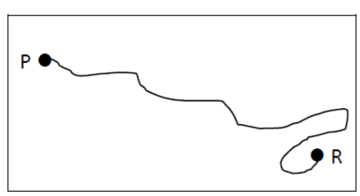

Figura 1

- Que vos parece? Alguém quer mostrar outro caminho que ele possa ter feito?

A professora alisa a areia, apaga o percurso traçado, e pede aos alunos que apresentem as suas propostas; é previsível que alguns se procurem distinguir traçando caminhos muito elaborados.

- Bom, mas a história não fica por aqui... (a professora alisa a areia). *Estava o Principezinho a começar a andar para ir ter com a rosa quando viu aproximar-se, imaginem só... uma ovelha! (a professora coloca o boneco da ovelha num ponto qualquer do "deserto", a uma distância da rosa semelhante à do Principezinho). O Principezinho só pensou numa coisa: "tenho de ir depressa proteger a rosa, antes que a ovelha se lembre de a comer!". Que caminho acham vocês que ele deve fazer?*

Pretende-se que os alunos indiquem e tracem um segmento de reta entre os pontos P e R:

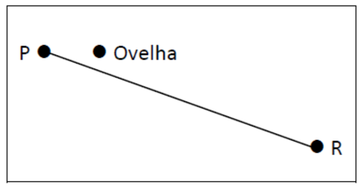

Figura 2

- Por que razão este caminho é melhor?

Alguns alunos poderão argumentar:

- É o caminho mais rápido.

- Mais rápido... então ele vai correr? Se ele correr muito depressa também pode ir por outro caminho e chegar lá antes da ovelha ou não?!

- Talvez...

- Vamos pensar que ele não vai correr, ele se calhar nem gosta de correr... Vamos imaginar que ele anda sempre à mesma velocidade, vá por que caminho for. Na vossa opinião, este continua a ser o melhor caminho? Porquê?

Pretende-se que os alunos reconheçam o segmento de reta [PR] como o caminho mais curto entre P e R. A professora altera a posição dos pontos P e R:

- E se o Principezinho estivesse neste ponto? E a rosa naquele?

Pretende-se que os alunos reconheçam o segmento de reta como o caminho mais curto entre dois pontos, quaisquer que eles sejam.

- Que conclusão parece que podemos tirar?

- ***No deserto, que é plano, o Principezinho deve ir em linha reta até à rosa para fazer o caminho mais curto.***

3. **Manipulação de materiais (II)**

- Já vimos o que acontece ao Principezinho quando quer ir ter com a rosa no deserto: como está num plano, ele deve andar em linha reta para fazer o caminho mais curto. Alguém tem dúvidas?

Esclarecidas eventuais dúvidas, a tarefa prossegue:

- Mas será que se passa o mesmo quando o Principezinho está no seu planeta e quer ir ter com a rosa? Vamos lá experimentar...

Os alunos deverão colocar a figura do Principezinho e o alfinete cor-de-rosa em dois pontos quaisquer da esfera.

- Que caminho há de seguir agora o Principezinho?

Os alunos irão unir os dois pontos usando cordel, elásticos ou um rolinho de plasticina para representar o percurso feito. Caso se use plasticina, pode-se depois retirá-la cuidadosamente da superfície da esfera, sem a deformar, para mostrar aos alunos mais céticos que, no seu planeta, o Principezinho se desloca sempre segundo uma linha curva. Utilizando a plasticina, e com alunos mais interessados, poder-se-á colocar o desafio de verificar se há mais do que uma “curva” (arco de circunferência) que permita unir os pontos P e R, e comparar os seus comprimentos na busca de um “caminho mais curto”. Mais tarde[2], os alunos poderão verificar que esse caminho mais curto corresponde ao arco de circunferência de um círculo máximo.

- *Que conclusão parece que podemos tirar?*

- No seu planeta, que é uma esfera, o Principezinho anda sempre em linha “curva” até à rosa.

Materiais para os alunos

Páginas seguintes

[2]Ver proposta de tarefa para o 2º Ciclo.

1º CICLO | **3º e 4º anos**

Tarefa

Planificação

PROPÓSITO PRINCIPAL DE ENSINO

Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na análise comparativa de propriedades de figuras geométricas construídas sobre superfície planas e sobre superfícies esféricas.

Tópicos / Subtópicos	Objetivos	Vocabulário
Geometria		Plano Curvo Superfície Esfera Reta Segmento de reta Triângulo Interior Exterior Fronteira Círculo Circunferência Arco de circunfe-rência
Figuras geométricas • Propriedades e classificação • Interior, exterior, fronteira • Círculo e circunferência	• Comparar e descrever figuras geométricas. • Identificar e traçar triângulos. • Distinguir entre interior, exterior e fronteira de um domínio limitado por uma linha fechada. • Distinguir círculo de circunferência.	
Capacidades transversais		
Raciocínio • Justificação • Argumentação **Comunicação** • Expressão • Discussão	• Explicar e justificar processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos. • Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito. • Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.	

PRÉ-REQUISITOS

Conhecer os seguintes aspetos da história do Principezinho: era um menino que vivia num planeta muito pequenino e que viajou até à Terra, tendo aterrado no deserto; para proteger a única rosa do planeta, queria ter um cercado ou redil para uma ovelha.

RECURSOS

- Placa de cortiça ou esferovite; em alternativa, geoplano; balões e marcadores; esferas de esferovite; boneco para simular a ovelha; alfinetes marcadores; cordel, elásticos ou plasticina; régua / material de desenho.

DURAÇÃO PREVISTA

90 minutos.

DESENVOLVIMENTO DA TAREFA

O ponto de partida será dado pela observação da figura seguinte:

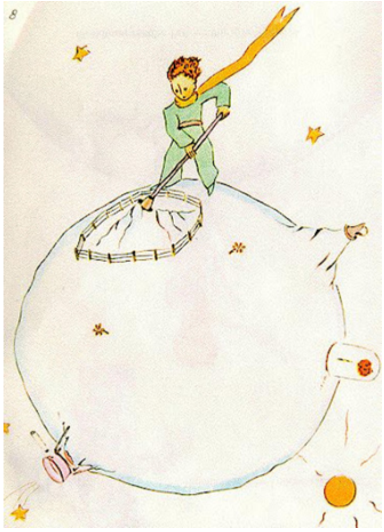

Figura 3

1. **Questões:**

   - (Mostrar a Figura anterior) *Quem está representado nesta figura? E onde?*

   - *É uma imagem do Principezinho no seu planeta.*

   - *Está a limpar um vulcão.*

   - *Exato, essa era uma das suas preocupações, outra era proteger a rosa...*

   - *Sim, está coberta por um vidro.*

   - *O Principezinho tinha pedido ao piloto para lhe desenhar uma ovelha e, mesmo tendo-a dentro de uma caixa, tinha muito medo que a ovelha pudesse comer a rosa, lembram-se? Olhem para a figura e observem bem a cerca à volta do vulcão: já pensaram no que seria construir um cercado naquele planeta, para que a ovelha pudesse pastar sem perigo para a rosa?*

   É previsível que os alunos apresentem diversas sugestões; o diálogo deverá ser encaminhado no sentido da **construção de um cercado triangular.**

2. **Manipulação de materiais (I):**

   - *Vamos começar por pensar que o Principezinho ainda estava na Terra, no deserto... qual é a principal diferença entre a superfície do deserto e a superfície do planeta do Principezinho?*

   - *O deserto é plano e a superfície do planeta é curva.*

   - *Muito bem, vamos então trabalhar no plano. Imaginem que o Principezinho encontrou um oásis e quer que a ovelha possa pastar sem perigo de fugir. A vossa tarefa é ajudá-lo: colocar a ovelha no pasto e construir um cercado triangular, não muito grande, de modo a que a ovelha fique no seu interior.*

   Os alunos deverão colocar a figura da ovelha num ponto qualquer da placa de cortiça ou esferovite; depois, com três alfinetes e elásticos, deverão construir um cercado triangular à volta da ovelha.

   - *Como podem ter a certeza de que a ovelha não passa para o exterior do triângulo?*

   - *Porque construímos uma linha fechada.*

   - *E a ovelha pode chegar à fronteira do triângulo?*

- Sim, se estiver a pastar encostada à cerca.

- E quando se acabar o pasto dentro do triângulo? Alguém tem ideias para que a ovelha não morra à fome. . . ? Atenção, o cercado tem de ser sempre triangular.

Pretende-se que os alunos sugiram o reposicionamento dos vértices do triângulo, de forma a aumentar progressivamente a sua área.

- Então a vossa ideia é mudar a posição dos vértices para aumentar a área do triângulo: experimentem e façam registo dos triângulos que construírem.

NOTA: O uso do geoplano nesta etapa facilita o registo, em papel ponteado, das propostas dos alunos; permite ainda, caso se entenda adequado, determinar/comparar a área dos vários triângulos construídos.

- Estivemos a trabalhar no deserto, ou seja, no plano, e a tarefa está concluída, alguma dificuldade?

- Não, nada de novo.

- Exato: ***no plano, qualquer triângulo é limitado por três segmentos de reta.***

3. **Manipulação de materiais (II)**

   - Então vamos ver como poderá ser o cercado triangular no planeta do Principezinho, pode ser que aí encontremos algumas novidades. . . Vamos começar por usar balões.

   Cada aluno recebe um balão, vazio, e recebe instruções para desenhar, com régua, um triângulo na superfície (ainda plana) do balão.

   - Porque será que vos mandei usar régua?

   - Para ter a certeza que traçamos linhas retas.

   - Certo. A próxima etapa vai ser. . . encher os balões! Observem bem o vosso triângulo: que aconteceu às belas linhas retas que vocês traçaram com tanto cuidado?

   - Estão curvas!

   - Então como é a fronteira de um triângulo desenhado sobre uma esfera?

   - É formada por três linhas curvas!

   - Pois é: na esfera, um triângulo é limitado por três linhas curvas.

4. **Manipulação de materiais (III)**

   - Vamos deixar os balões e usar agora as bolas de esferovite, porque já descobrimos como vão ser os lados de um triângulo no planeta do Principezinho mas ainda não pensamos como aumentar a sua área quando for preciso mais pasto para a ovelha. Alguma ideia?

   - Podemos experimentar fazer como no oásis: construir um triângulo e depois ir mudando a posição dos vértices.

   Os alunos irão marcar três pontos na esfera de esferovite com os alfinetes e uni-los usando cordel ou elásticos. Depois "preenchem" o interior do triângulo, revestindo a superfície da esfera com uma camada de plasticina. Retirando-se cuidadosamente o triângulo de plasticina, para não o deformar, os alunos poderão observar a curvatura tanto da sua superfície como dos seus lados.

   NOTA: Em vez de plasticina pode usar-se barro de secagem rápida.

   - Aposto que vocês nunca tinham imaginado um triângulo destes! Sigam com a vossa ideia: mudem a posição dos vértices para aumentar a área do triângulo.

   Considerando o triângulo inicial [ABC], com interior verde e exterior azul, o objetivo dos alunos é então alterar a posição dos vértices de modo a aumentar a região verde. Na superfície da esfera vão ser confrontados com uma realidade inesperada: à medida que aumenta, a região verde tende a "dar a volta" à esfera e a cobri-la, ao mesmo tempo que a região azul diminui tomando uma forma parecida com a forma do triângulo inicial (Figura 4).

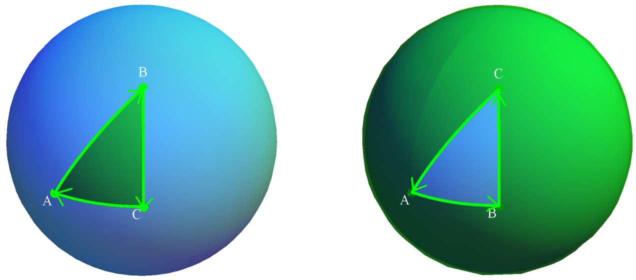

Figura 4: NOTA - De facto, dados três pontos distintos na superfície esférica estes podem definir dois triângulos, na medida em que podem definir duas regiões limitadas na superfície esférica; esta conclusão não está, naturalmente, ao alcance dos alunos deste grau de escolaridade.

- Então, que vos parece que vai acontecer à medida que mudam a posição dos vértices?

- O triângulo cobre a superfície toda da esfera... é estranho...

- A esfera toda é um triângulo?!

- Não é exatamente assim... um dia podemos pensar melhor nisso. Nesta altura eu gostava que vocês se concentrassem em comparar o que se passa com o aumento da área do triângulo do plano e na esfera: que me podem dizer?

- ***No plano, a área do triângulo pode aumentar sempre, não tem fim.***

- Não tem limite. E na esfera?

- ***Na esfera, a área do triângulo nunca vai poder ser maior do que a área da esfera.***

Materiais para os alunos

Página seguinte