A Geometria do Planeta Terra

No âmbito da iniciativa *Matemática do Planeta Terra 2013,* a Associação Atractor e o Núcleo do Porto da Associação de Professores de Matemática propõem a realização de um conjunto de tarefas sobre Geometria Esférica. O estudo desta geometria pode permitir a resolução de problemas ligados ao planeta Terra: por exemplo, na época dos Descobrimentos, era muito importante saber qual o caminho mais curto entre dois locais do planeta e qual a rota que se deveria seguir. Mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores deverão ter conhecimentos sobre Geometria Esférica. Esta geometria difere em vários aspetos da Geometria Euclidiana e, nestas tarefas, pretende-se iniciar o seu estudo bem como explorar algumas dessas diferenças. O trabalho proposto, de caráter exploratório, recorre a materiais manipuláveis e a ambientes de geometria dinâmica que proporcionam uma melhor visualização e compreensão de determinadas propriedades, facilitando a formulação de conjeturas e desenvolvendo a capacidade de resolução de problemas.

ATRACTOR
www.atractor.pt

APM
Associação de Professores de Matemática

Ano lectivo 2012/2013

Conteúdo

Na página http://atractor.pt/mat/GeomEsf encontra-se um trabalho sobre Geometria Esférica, elaborado sob a orientação do Atractor, no âmbito de uma bolsa atribuída pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia para ações de divulgação matemática junto da Associação Atractor. Esse trabalho integra componentes interativas em formato CDF, preparadas com o programa *Mathematica* e cujos ficheiros (disponíveis em http://atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino) são utilizados neste projeto numa colaboração entre a Associação Atractor e o Núcleo do Porto da APM. Para a utilização destes ficheiros, deve estar instalado no computador o *Wolfram CDFPlayer*, que pode ser importado sem encargos a partir de http://www.wolfram.com/cdf-player/.

NOTA HISTÓRICA

"E quem desta maneira andar irá caminhar direito." Pedro Nunes (1502-1578)

A esfera pode ser considerada um modelo (simplificado[1]) do planeta Terra e existe uma geometria que se dedica ao seu estudo: a Geometria Esférica. O estudo da Geometria Esférica, principalmente o relacionado com triângulos esféricos, é muito antigo e foi sendo desenvolvido ao longo dos séculos devido à sua grande aplicabilidade à Astronomia e à Navegação. O português Pedro Nunes foi um dos matemáticos que se notabilizou nesta área tendo descoberto uma curva que, na época dos Descobrimentos, gerou alguma controvérsia: a curva loxodrómica. Mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores têm que ter conhecimentos sobre Geometria Esférica (Alexander, 2004 [1]).

Apesar de muitos resultados da Geometria Esférica serem conhecidos desde a Antiguidade, enquanto sistema axiomático, este tipo de geometria só foi formalizado no séc. XIX após a descoberta das geometrias não Euclidianas. Estas geometrias surgiram no desenlace da longuíssima história do famoso 5º Postulado de Euclides, mais conhecido pelo Postulado das Paralelas. Ao longo dos séculos, foram várias as tentativas de provar este postulado a partir dos restantes, ou então de o substituir por outro mais simples. Um dos axiomas equivalentes que é usado nos livros modernos foi dado por Playfair: *dado um ponto P que não está numa reta r, existe uma só reta no plano de P e r que contém P e que não interseta r*. (Kline, 1972 [3])

No início do século XIX, alguns matemáticos, incluindo o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), notaram que o Postulado das Paralelas não poderia ser provado nem como verdadeiro nem como falso com base nos outros postulados da Geometria Euclidiana, ou seja, o Postulado das Paralelas seria independente dos restantes. Seria então possível desenvolver uma nova geometria a partir de um sistema axiomático que contivesse uma alternativa ao Postulado das Paralelas. Mas foram Lobatschewski (1792-1856) e János Bolyai (1802-1860) que, de forma independente, publicaram pela primeira vez os resultados de uma nova geometria não Euclidiana (Rosenfeld, 1976 [4]), conhecida atualmente por Geometria Hiperbólica. A Geometria Hiperbólica obtém-se substituindo o Postulado das Paralelas pelo Axioma Hiperbólico: *dada uma reta e um ponto exterior à reta, existem, pelo menos, duas retas distintas contendo o ponto dado e paralelas à reta dada.* Na Geometria Esférica, o Postulado das Paralelas é substituído pelo Axioma Elíptico: *dada uma reta e um ponto exterior à reta, não existe nenhuma reta contendo o ponto dado e paralela à reta dada.*

Bernhard Riemann (1826-1866) foi o primeiro a reconhecer a Geometria Esférica como um tipo de geometria não Euclidiana onde não existem retas paralelas. (Coxeter, 1998 [2])

A descoberta das geometrias não Euclidianas teve consequências muito importantes, quer matemáticas quer filosóficas, principalmente no que diz respeito aos fundamentos da matemática.

[1] Na verdade, o planeta Terra pode ser modelado por um elipsoide: o raio da Terra varia entre, aproximadamente, 6357 Km nos polos e 6378 Km na linha do Equador.

Referências

[1] ALEXANDER, James - *Loxodromes: A Rhumb Way to Go.* Mathematics Magazine, Vol. 77, n.º 5, December 2004, pp. 349 - 356.

[2] COXETER, H. S. M. - *Non-Euclidean Geometry*. Cambridge University Press, 1998.

[3] KLINE, Morris - *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times, Volume 3.* Oxford University Press, 1972.

[4] ROSENFELD, B. A. - *A History of Non-Euclidean Geometry.* New York: Springer-Verlag New York Inc., 1988. Translation of *Istoriya Neevklidovoi Geometrii.* Moscow: Nauka, 1976.

2º CICLO

Tarefa

Planificação

PROPÓSITO PRINCIPAL DE ENSINO
Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na análise comparativa de propriedades de figuras geométricas construídas sobre superfície planas e sobre superfícies esféricas.

Tópicos / Subtópicos	Objetivos	Vocabulário
Geometria		Plano Curvo Superfície Esfera Reta Segmento de reta Mediatriz Ângulo Círculo Circunferência Círculo máximo Perímetro
Figuras no plano • Retas, semirretas e segmentos de reta • Circunferência e círculo: propriedades e construção **Perímetros** • Círculo	• Identificar e representar retas perpendiculares e concorrentes, semirretas, segmentos de reta, e identificar a sua posição relativa no plano. • Identificar as propriedades da circunferência e distinguir circunferência de círculo. • Resolver problemas envolvendo perímetro do círculo.	
Capacidades transversais		
Raciocínio • Justificação • Argumentação **Comunicação** • Expressão • Discussão	• Explicar e justificar processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos. • Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito. • Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.	

PRÉ-REQUISITOS
▪ Saber traçar a mediatriz de um segmento de reta. ▪ Saber calcular o perímetro de um círculo, conhecido o raio. ▪ Saber calcular o comprimento de um arco de circunferência, conhecidos o raio e o ângulo ao centro correspondente. ▪ Ter conhecimentos elementares de utilização do GeoGebra.

RECURSOS
Material de medida e desenho: régua, compasso, transferidor; esferas de esferovite e alfinetes; cordel ou elásticos; calculadora; computador com o *software GeoGebra* e *Wolfram CDFPlayer* (pode ser importado sem encargos a partir de http://www.wolfram.com/cdf-player/);
ficheiro *esfera_azul-2ciclo.cdf* disponível em http://atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino.

DURAÇÃO PREVISTA
2 blocos de 90 minutos.

DESENVOLVIMENTO DA TAREFA

Organizados em pares ou grupos de três, com um computador por grupo, todos os alunos irão desenvolver duas tarefas, A e B (por esta ordem):

	Tarefa A	**Tarefa B**
Suporte	GeoGebra	Applet
Geometria	No plano	Na esfera
Finalidade	Levar os alunos a verificar que, no plano, dados dois pontos quaisquer A e B: a) existem infinitas circunferências que passam em A e B; b) o "caminho" mais curto entre A e B tem comprimento $\overline{AB}$.	Levar os alunos a verificar que, na esfera, dados dois pontos quaisquer A e B: a) existem infinitas circunferências que passam em A e B; b) o "caminho" mais curto entre A e B é dado pelo menor arco de círculo máximo que passa por A e B.
Observações	Paralelamente à execução da tarefa no Geogebra, os alunos poderão realizar os traçados indicados em papel, utilizando régua, compasso e transferidor.	Os alunos deverão utilizar esferas de esferovite, alfinetes e fio/elásticos para concretizar as várias etapas da tarefa desenvolvidas com o applet.

O trabalho será desenvolvido de forma autónoma, com base nos guiões de cada uma das tarefas; no final, cada grupo deverá apresentar um relatório do trabalho realizado e respostas para as questões colocadas.

Guião

Páginas seguintes

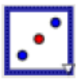
TAREFA A – No plano

A01. Abre o GeoGebra

A02. Clica *Exibir* e remove os eixos, para ficares com uma folha em branco.

A03.  Marca dois pontos A e B.

A04.  Traça o segmento de reta [AB]; regista no teu relatório a medida do seu comprimento (está na folha algébrica).

A05.  Marca o ponto médio de [AB] – ponto C; calcula e regista no teu relatório a medida do comprimento de [AC]

A06.  Com centro no ponto C, traça a circunferência que passa em A; essa circunferência passa também em B?

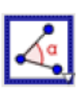
A07. Calcula e regista no teu relatório a medida do comprimento do arco $\widehat{AB}$.

A08.  Traça a mediatriz de [AB] – a perpendicular a [AB] que passa no ponto médio do segmento.

A09.  Marca um ponto qualquer D sobre a mediatriz.

A10.  Com centro no ponto D, traça a circunferência que passa em A; essa circunferência passa também em B?

A11.  Traça [AD] e regista no teu relatório a medida do seu comprimento (está na folha algébrica).

A12.  Determina a amplitude do ângulo ADB.

A13. Para a circunferência de centro em D, calcula e regista no teu relatório a medida do comprimento do arco menor $\widehat{AB}$.

A14. Repete as etapas **A09** a **A13** para três outros pontos: E, F e G.

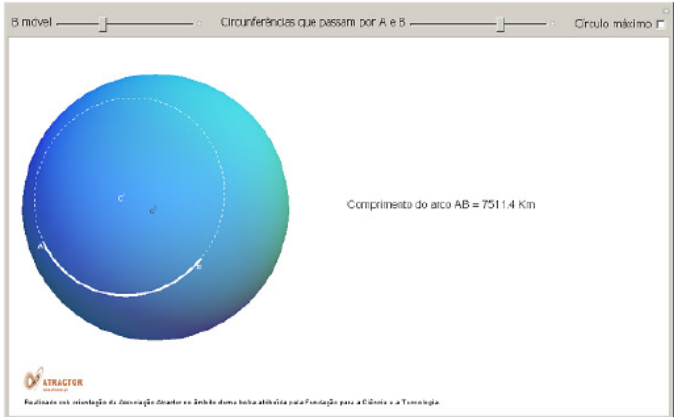
A15. Com base nos teus conhecimentos anteriores e no trabalho que realizaste, responde às seguintes questões:

a) **Quantos segmentos de reta passam por dois pontos do plano?**
b) **Quantas circunferências passam por dois pontos do plano? Fundamenta a tua resposta.**
c) **Qual é o caminho mais curto (o caminho de menor comprimento) entre dois pontos do plano?**

TAREFA B – Na esfera

B01. Abre o ficheiro *esfera_azul-2ciclo.cdf.*

B02. A imagem no monitor representa o planeta Terra. Observa com atenção:

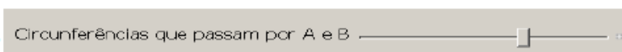


B03. Completa:

A Terra está representada por uma esfera azul de centro ______.

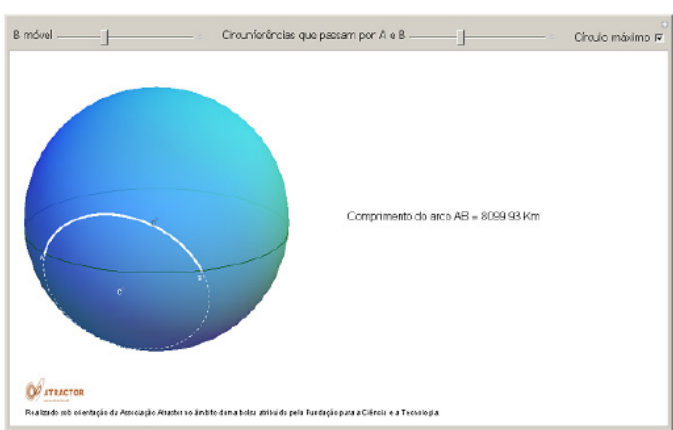
Na superfície da Terra estão marcados dois pontos A e B. O caminho entre A e B assinalado (linha branca a cheio) é um ____.

A linha branca (a cheio e a tracejado) representa uma ____________________________ que passa nos pontos A e B, com centro em ______.

B04. Desloca o cursor  .

a) Que observas?
b) Quantas circunferências passam, na superfície da esfera, pelos pontos A e B?
c) Que podes dizer acerca do comprimento do arco AB?
d) Escolhe seis circunferências diferentes e regista no teu caderno os comprimentos do arco AB correspondentes a cada uma delas.

B05. Desloca o cursor anterior para que o comprimento do arco AB seja cerca de 8000 km e assinala a opção *Círculo máximo.*



B06. Desloca novamente o cursor *Circunferências que passam por A e B* até conseguires fazer coincidir a circunferência branca com o círculo máximo.

a) Observa os pontos O e C. Que verificas?

b) Qual é o comprimento do arco AB?

c) Compara o valor anterior com os valores registados no teu caderno. Que verificas?

B07. O ponto A está fixo, mas o cursor 

permite-te deslocar o ponto B.
Usa-o para escolher diferentes posições para o ponto B.
Para cada um das posições escolhidas, repete os procedimentos **B04** a **B06**.

B08. Com base nos teus conhecimentos anteriores e no trabalho que realizaste, responde às seguintes questões:

a) Nesta tarefa, a que figura geométrica correspondem os caminhos entre dois pontos representados na superfície da esfera?

b) Quantas circunferências passam por dois pontos na esfera? Fundamenta a tua resposta.

c) Na tua opinião, o que é um círculo máximo?

d) Qual é o caminho mais curto entre dois pontos na esfera?