Diagonal mais longa

Relativamente à incomensurabilidade entre a diagonal mais longa de um polígono regular de n lados, com $n \geqslant 4$ e o seu lado, vamos considerar dois casos separadamente:

- Se n é par, então a diagonal mais longa é o diâmetro da circunferência que circunscreve o polígono, logo a razão entre esta diagonal e o lado do polígono é:

$$\frac{2R}{2R\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

Supondo que esta razão é um número racional λ, temos:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} = \lambda \Longleftrightarrow \sin\tfrac{\pi}{n} = \tfrac{1}{\lambda} \Longrightarrow \sin^2\tfrac{\pi}{n} = \tfrac{1}{\lambda^2} \Longleftrightarrow \tfrac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{2} = \tfrac{1}{\lambda^2} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow 1-\cos\tfrac{2\pi}{n} = \tfrac{2}{\lambda^2} \Longleftrightarrow 1-\tfrac{1}{2}(t+t^{-1}) = \tfrac{2}{\lambda^2} \Longleftrightarrow t+t^{-1}+\tfrac{4}{\lambda^2}-2 = 0 \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow t^2+1+\left(\tfrac{4}{\lambda^2}-2\right)t = 0 \Longleftrightarrow f(t) = 0
\end{aligned}$$

onde $t = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ e $f(x) = x^2 + \left(\frac{4}{\lambda^2}-2\right)x + 1$ é um polinómio de grau 2 coeficientes racionais do qual t é raiz. Mas, já vimos que o menor grau possível para um polinómio nessas condições era $\phi(n)$. Logo, temos necessariamente que $\phi(n) \leqslant 2$, ou seja, $n \leqslant 6$. Como n é par, os únicos casos possíveis são o quadrado ($n = 4$) e o hexágono regular ($n = 6$). No primeiro caso, a diagonal mais longa é também a mais curta, uma vez que é a única, sendo incomensurável com o lado; no segundo caso, a diagonal mais longa é a segunda mais curta, sendo comensurável com o lado (é o dobro do lado).

- Se n é ímpar, com $n = 2m+1$, então a diagonal mais longa é a $(m-1)$-ésima diagonal mais curta, logo a sua medida é:

$$2R\sin\frac{m\pi}{n} = 2R\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right) = 2R\cos\frac{\pi}{2n}$$

e a razão entre esta diagonal e o lado do polígono é:

$$\frac{2R\cos\frac{\pi}{2n}}{2R\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\left(2\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2n}}$$

Supondo que esta razão é um número racional λ, temos:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{2n}} = \lambda \Longleftrightarrow 2\sin\tfrac{\pi}{2n} = \tfrac{1}{\lambda} \Longrightarrow 4\sin^2\tfrac{\pi}{2n} = \tfrac{1}{\lambda^2} \Longleftrightarrow 4\left(\tfrac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2}\right) = \tfrac{1}{\lambda^2} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow 2-2\cos\tfrac{\pi}{n} = \tfrac{1}{\lambda^2} \Longleftrightarrow 2-(t+t^{-1}) = \tfrac{1}{\lambda^2} \Longleftrightarrow t+t^{-1}+\tfrac{1}{\lambda^2}-2 = 0 \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow t^2+1+\left(\tfrac{1}{\lambda^2}-2\right)t = 0 \Longleftrightarrow g(t) = 0
\end{aligned}$$

onde $t = e^{\frac{\pi i}{n}}$ e $g(x) = x^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2}-2\right)x + 1$ é um polinómio mónico de coeficientes racionais do qual t é raiz e de grau 2. Mas, já vimos que o menor grau possível para um polinómio nessas condições era $\phi(2n)$. Logo, temos necessariamente que $\phi(2n) \leqslant 2$, ou seja, $n \in \{1, 2, 3\}$, o que é impossível uma vez que estamos a considerar $n \geqslant 4$.

Assim, excepto no caso do hexágono regular, a diagonal mais longa de um polígono regular é sempre incomensurável com o lado. Em que casos poderemos demonstrar esta incomensurabilidade por um processo geométrico análogo ao utilizado no caso da diagonal mais curta? Supondo $n > 6$, vamos novamente considerar os dois casos separadamente:

- Se n é par:
Neste caso, a razão $\lambda = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}$ terá de ser raiz de um polinómio de grau 2 de coeficientes inteiros. Supondo que tal acontece, temos que $t = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ é raiz de um polinómio de grau 4, logo vem $\phi(n) \leqslant 4$.

- Se n é ímpar:
Neste caso, a razão $\lambda = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2n}}$ terá de ser raiz de um polinómio de grau 2 de coeficientes inteiros. Supondo que tal acontece, temos que $t = e^{\frac{\pi i}{n}}$ é raiz de um polinómio de grau 4, logo vem $\phi(2n) \leqslant 4$. Mas, como, n é ímpar, temos $\phi(2n) = \phi(2)\phi(n) = \phi(n)$.

Em ambos os casos vem $\phi(n) \leqslant 4$, ou seja, $n \in \{8, 10, 12\}$. Analisemos as três situações separadamente:

- Se $n = 8$,

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \\
&= \frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}} = \frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \\
&= \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

é raiz do polinómio $x^4 - 8x^2 + 8$, sendo este um polinómio mónico de coeficientes inteiros, irredutível e de grau 4. Logo, este polinómio divide todos os outros polinómios de coeficientes inteiros dos quais λ é raiz, pelo que nenhum deles poderá ter grau 2.

- Se $n = 10$,

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{10}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{5}}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}} = \\
&= \frac{4}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5}+1
\end{aligned}$$

é raiz do polinómio $x^2 - 2x - 4$, sendo este um polinómio mónico de coeficientes inteiros, irredutível e de grau 2.

- Se $n = 12$,

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \\ &= \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{4-(\sqrt{3})^2}} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{6}+\sqrt{2}\end{aligned}$$

é raiz do polinómio $x^4 - 16x^2 + 16$, sendo este um polinómio mónico de coeficientes inteiros, irredutível e de grau 4. Logo, este polinómio divide todos os outros polinómios de coeficientes inteiros dos quais λ é raiz, pelo que nenhum deles poderá ter grau 2.

Portanto, apenas para o decágono regular ($n = 10$) é possível demonstrar esta incomensurabilidade por um processo geométrico análogo ao utilizado no caso da primeira e da segunda diagonal mais curta.