Para cada $t \in \{0, 1, ..., n-1\}$, sejam

$$\lambda_t = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \omega^{jt}$$

e

$$u_t = (\omega^{jt})_{j=0,1,\dots,n-1} = (1, \omega^t, \omega^{2t}, ..., \omega^{(n-1)t})$$

onde ω é uma raiz primitiva de ordem n da unidade (por exemplo, $e^{\frac{2\pi i}{n}}$). Então, se $v_t = Au_t$, vem

$$\begin{aligned}
(v_t)_i &= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n-i+j} (u_t)_j = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n-i+j} \omega^{jt} = \\
&= \sum_{j=n-i}^{2n-1-i} \alpha_j \omega^{(j-n+i)t} = \omega^{(-n+i)t} \sum_{j=n-i}^{2n-1-i} \alpha_j \omega^{jt} = \\
&= \omega^{it} \left(\sum_{j=n-i}^{n} \alpha_j \omega^{jt} + \sum_{j=n+1}^{2n-1-i} \alpha_j \omega^{jt} \right) = \\
&= \omega^{it} \left(\sum_{j=n-i}^{n} \alpha_j \omega^{jt} + \sum_{j=1}^{n-1-i} \alpha_j \omega^{(j-n)t} \right) = \\
&= \omega^{it} \left(\sum_{j=n-i}^{n} \alpha_j \omega^{jt} + \sum_{j=1}^{n-1-i} \alpha_j \omega^{jt} \right) = \\
&= \omega^{it} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \omega^{jt} = \omega^{it} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \omega^{jt} = \lambda_t (u_t)_i
\end{aligned}$$

para todo $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, logo $v_t = \lambda_t u_t$. Isto significa que u_t é vector próprio da matriz A associado ao valor próprio λ_t.

Estes vectores são ortogonais entre si, uma vez que

$$\begin{aligned}
\langle u_r, u_s \rangle &= \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jr} \overline{\omega^{js}} = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(r-s)} = \sum_{j=0}^{n-1} (\omega^{r-s})^j = \\
&= \frac{1 - \omega^{(r-s)n}}{1 - \omega^{r-s}} = \frac{1-1}{1 - \omega^{r-s}} = 0
\end{aligned}$$

se $r \neq s$. Assim, o conjunto de vectores $\{u_0, u_1, ..., u_{n-1}\}$ constitui uma base formada por vectores próprios da matriz A e o vector $x^{(0)}$ pode ser escrito em termos desta base, pelo que temos

$$x^{(0)} = \sum_{t=0}^{n-1} c_t u_t$$

para certos coeficientes c_t, com $t \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Notemos também que

$$x^{(k)} = \sum_{t=0}^{n-1} c_t \lambda_t^k u_t$$

para cada inteiro positivo k. Relativamente aos valores próprios λ_t, estes ou são reais ou ocorrem aos pares de números imaginários conjugados. De facto, o conjugado de λ_t é

$$\overline{\lambda_t} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \overline{\omega^{jt}} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \omega^{-jt} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \omega^{j(n-t)} = \lambda_{n-t}$$

sendo que

$$\begin{aligned} \lambda_t \quad &\in \quad \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda_t = \overline{\lambda_t} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \omega^{jt} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \omega^{-jt} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j (\omega^{jt} - \omega^{-jt}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \sin \frac{2\pi jt}{n} = 0 \end{aligned}$$

Supondo agora que $\lambda_0 = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j = 1$ temos que, se todos os outros valores próprios forem inferiores a 1 em módulo, vem $x^{(k)} \longrightarrow c_0 u_0$ quando $k \longrightarrow +\infty$ e todos os pontos tendem para um ponto fixo, de abcissa $c_0 u_0$. Note-se que $u_0 = \omega^0 = 1$ e $c_0 = \frac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} x_j$, ou seja, as coordenadas deste ponto são dadas pela média aritmética das respectivas coordenadas dos pontos iniciais (este ponto é designado por centro gravítico).

A matrix de mudança de coordenadas da base de vectores próprios $\{u_0, u_1, ..., u_{n-1}\}$ para a base canónica é

$$M = (\omega^{ij})_{0 \le i,j \le n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & \omega & ... & \omega^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & \omega^{n-1} & ... & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

Esta matriz é simétrica e, além disso, verifica

$$M.\overline{M} = nI$$

pelo que a inversa desta matriz (ou seja, a matrix de mudança de coordenadas da base canónica para a base de vectores próprios) é dada por

$$M^{-1} = \frac{1}{n}\overline{M}$$

Temos então

$$x^{(0)} = Mc = \sum_{t=0}^{n-1} c_t u_t$$

ou, equivalentemente,

$$c = M^{-1}x^{(0)} = \frac{1}{n}\overline{M}x^{(0)} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j \overline{u_j}$$

isto é,

$$c_t = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-jt} x_j$$

Assim, podemos ver que, por exemplo, $c_0 = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j$ e, se n é par, $c_{n/2} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j x_j$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}\overline{u_t} &= (\overline{\omega^{jt}})_{j=0,1,\ldots,n-1} = (\omega^{-jt})_{j=0,1,\ldots,n-1} = \\ &= (\omega^{j(n-t)})_{j=0,1,\ldots,n-1} = u_{n-t}\end{aligned}$$

para todo $t \in \{1, ..., n-1\}$ e, analogamente,

$$\overline{c_t} = c_{n-t}$$

Note-se que

$$u_t = (\omega^{jt})_{j=0,1,\ldots,n-1} = \left(\cos\frac{2\pi jt}{n} + i\sin\frac{2\pi jt}{n}\right)_{j=0,1,\ldots,n-1}$$

Escrevendo $c_t = a_t + ib_t$, com a_t e b_t valores reais, para $t \in \{0, 1, ..., n-1\}$, temos que $a_t = \frac{1}{2}(c_t + \overline{c_t}) = \frac{1}{2}(c_t + c_{n-t})$ e $b_t = \frac{1}{2}(c_t - \overline{c_t}) = \frac{1}{2}(c_t - c_{n-t})$ quando $t \in \{1, ..., n-1\}$ Então, se n é par, vem

$$
\begin{aligned}
x_j^{(0)} &= \sum_{t=0}^{n-1} c_t (u_t)_j = c_0.1 + \sum_{t=1}^{n/2-1} c_t (u_t)_j + c_{n/2}.(-1)^j + \sum_{t=n/2+1}^{n-1} c_t (u_t)_j = \\
&= c_0 + \sum_{t=1}^{n/2-1} c_t (u_t)_j + \sum_{t=1}^{n/2-1} c_{n-t} (u_{n-t})_j + (-1)^j c_{n/2} = \\
&= c_0 + \sum_{t=1}^{n/2-1} \left(c_t \cos \frac{2\pi jt}{n} + i.c_t \sin \frac{2\pi jt}{n} \right) + \sum_{t=1}^{n/2-1} \left(c_{n-t} \cos \frac{2\pi jt}{n} - i.c_{n-t} \sin \frac{2\pi jt}{n} \right) + (-1)^j c_{n/2} = \\
&= c_0 + \sum_{t=1}^{n/2-1} \left((c_t + c_{n-t}) \cos \frac{2\pi jt}{n} + i(c_t - c_{n-t}) \sin \frac{2\pi jt}{n} \right) + (-1)^j c_{n/2} = \\
&= c_0 + \sum_{t=1}^{n/2-1} \left(2a_t \cos \frac{2\pi jt}{n} - 2b_t \sin \frac{2\pi jt}{n} \right) + (-1)^j c_{n/2}
\end{aligned}
$$

e, se n é ímpar,

$$
\begin{aligned}
x_j^{(0)} &= \sum_{t=0}^{n-1} c_t (u_t)_j = c_0.1 + \sum_{t=1}^{(n-1)/2} c_t (u_t)_j + \sum_{t=(n+1)/2}^{n-1} c_t (u_t)_j = \\
&= c_0 + \sum_{t=1}^{(n-1)/2} c_t (u_t)_j + \sum_{t=1}^{(n-1)/2} c_{n-t} (u_{n-t})_j = \\
&= c_0 + \sum_{t=1}^{(n-1)/2} \left(c_t \cos \frac{2\pi jt}{n} + i.c_t \sin \frac{2\pi jt}{n} \right) + \sum_{t=1}^{(n-1)/2} \left(c_{n-t} \cos \frac{2\pi jt}{n} - i.c_{n-t} \sin \frac{2\pi jt}{n} \right) = \\
&= c_0 + \sum_{t=1}^{(n-1)/2} \left((c_t + c_{n-t}) \cos \frac{2\pi jt}{n} + i(c_t - c_{n-t}) \sin \frac{2\pi jt}{n} \right) \\
&= c_0 + \sum_{t=1}^{(n-1)/2} \left(2a_t \cos \frac{2\pi jt}{n} - 2b_t \sin \frac{2\pi jt}{n} \right) + (-1)^j c_{n/2}
\end{aligned}
$$

Consideremos a representação de Fourier das abcissas $x_j^{(0)}$, dada por

$$
x_j^{(0)} = \sum_{t=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(P_t \cos \frac{2\pi jt}{n} + Q_t \sin \frac{2\pi jt}{n} \right)
$$

onde $\lfloor n/2 \rfloor$ representa a parte inteira de $n/2$.

Então, fazendo $P_0 = c_0$, $Q_0 = 0$, $P_t = 2a_t$, $Q_t = -2b_t$ para todo $t \in \{1, ..., \lfloor (n-1)/2 \rfloor\}$ e, se n é par, $P_{n/2} = c_{n/2}$ e $Q_{n/2} = 0$, concluímos que é sempre possível obter a representação de Fourier das abcissas $x_j^{(0)}$ (ou seja, das abcissas dos vértices iniciais) e que esta representação é única.

Finalmente, se $det(A) = 0$, existe pelo menos um vector próprio u_t tal que $Au_t = 0$, ou seja, tal que

$$\lambda_t = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \omega^{jt} = 0$$

Para esse vector u_t, verifica-se também que $u_t^T A = 0$, pelo que, sendo $x^{(1)} = Ax^{(0)}$, temos $u_t^T x^{(1)} = u_t^T A x^{(0)} = 0$.

Por exemplo, se $n = 6$ e tomarmos $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}$ e $\alpha_j = 0$ para $j > 1$, então temos $\lambda_3 = 0$ e $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1, -1, 1, -1, 1, -1)$, pelo que, sendo

$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \\ x_3^{'} \\ x_4^{'} \\ x_5^{'} \\ x_6^{'} \end{pmatrix}$, vem $u_3^T x^{(1)} = x_0' - x_1' + x_2' - x_3' + x_4' - x_5' = 0$, ou seja,

$\dfrac{x_0' + x_2' + x_4'}{3} = \dfrac{x_1' + x_3' + x_5'}{3}$, como foi visto anteriormente.