No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu *site* *www.atractor.pt* .
Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

DINÂMICA DE UMA FAMÍLIA DE EXPONENCIAIS

No artigo *De formulis exponentialibus replicatis*[1], Euler considera um problema proposto por Condorcet sobre a sucessão $c^c, c^{c^c}, c^{c^{c^c}}, \ldots$, sendo $c > 0$, convencendo-se, a partir de vários exemplos e alguns cálculos, de que esta sucessão converge se e só se $c \in [e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}]$. O que é que se passa quando $c > 0$ está fora deste intervalo? E se c for complexo?

Por razões que o leitor entenderá em breve, a questão sobre o comportamento assimptótico destas sucessões de exponenciais está relacionada com outra mais simples: Para que valores reais de $a, b > 0$ se tem $a^b = b^a$? A igualdade é óbvia quando $a = b$. Para valores distintos de a e b, podemos listar alguns exemplos simples, como $3^1 > 1^3$, $3^2 > 2^3$, $3^{2.5} < 2.5^3$, $3^4 > 4^3$, $3^5 > 5^3$, $3^6 > 6^3$, $2^{1/3} > (1/3)^2$, $2^1 > 1^2$, $2^3 < 3^2$, $2^4 = 4^2$, $2^5 > 5^2$, $2^6 > 6^2$, $(\sqrt{2})^{1/5} > (1/5)^{\sqrt{2}}$, $(\sqrt{2})^1 > 1^{\sqrt{2}}$, $(\sqrt{2})^2 < 2^{\sqrt{2}}$, $(\sqrt{2})^3 < 3^{\sqrt{2}}$, $(\sqrt{2})^9 > 9^{\sqrt{2}}$, mas não se reconhece aqui um padrão geral. Se, porém, reescrevermos a equação $a^b = b^a$ como $a^{1/a} = b^{1/b}$ e esboçarmos o gráfico da função $x > 0 \mapsto f(x) = x^{1/x}$, teremos uma ideia aproximada dos valores da imagem de f que são obtidos mais do que uma vez (figura 1).

Esta função tem um máximo global $e^{1/e}$, atingido apenas em $x = e$, e é estritamente crescente em $]0, e[$ e estritamente decrescente em $]e, +\infty[$. Além disso, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1^+$. Logo, cada reta horizontal $y = c$ com $1 < c < e^{1/e}$ (e só para estes valores de c) interseta o gráfico de f em dois pontos cujas abcissas determinam dois reais positivos distintos a e

[1] Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae I (1778) 38--60

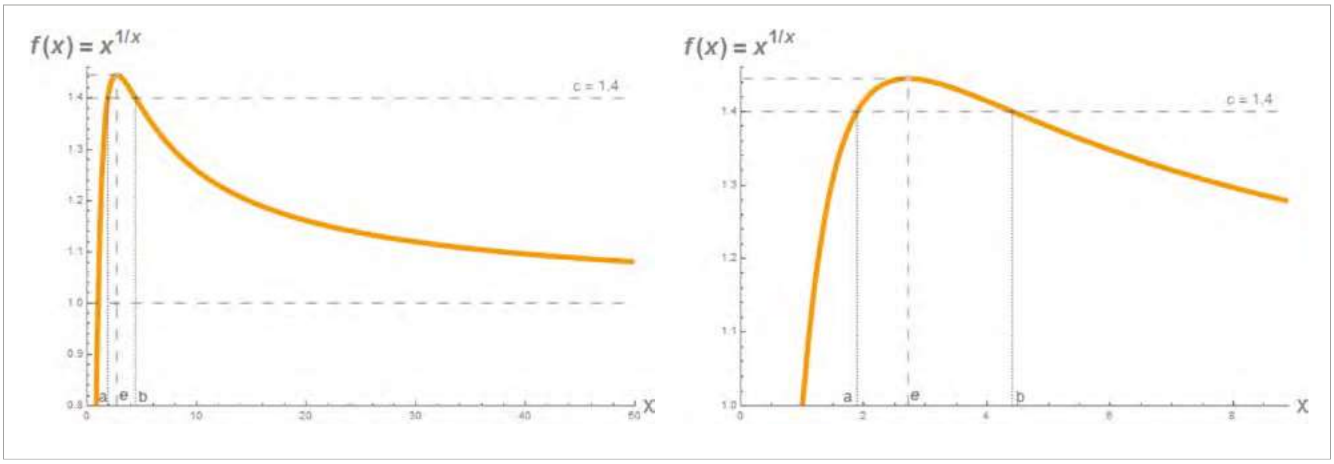

Figura 1. Gráfico da função *f*.

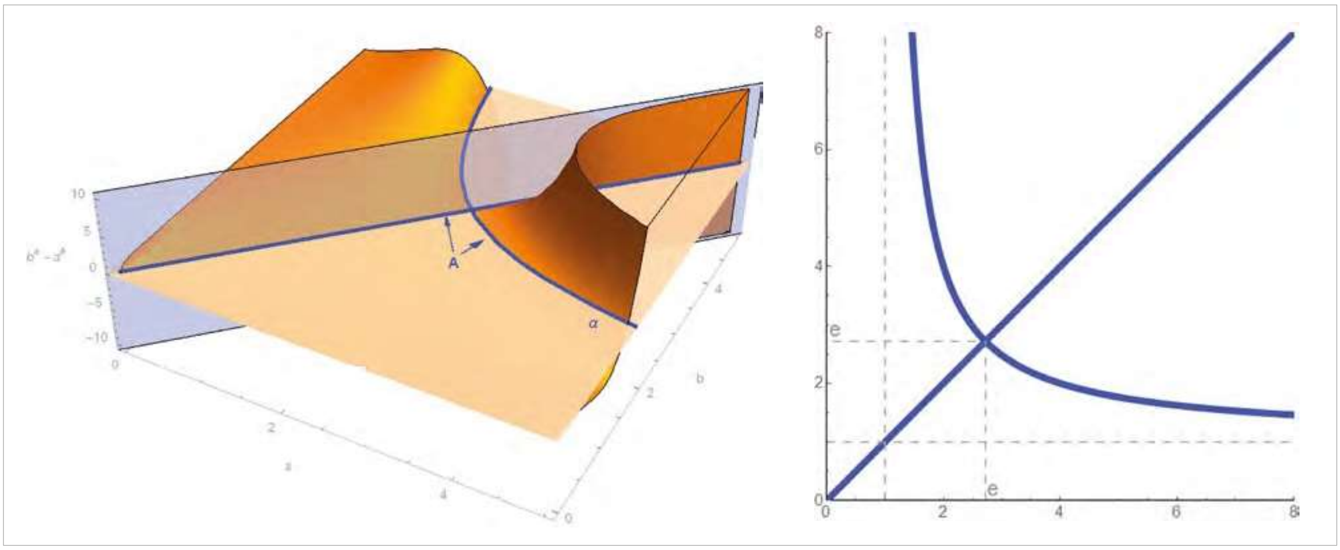

Figura 2. Traço da curva α e o conjunto $\mathcal{A}$.

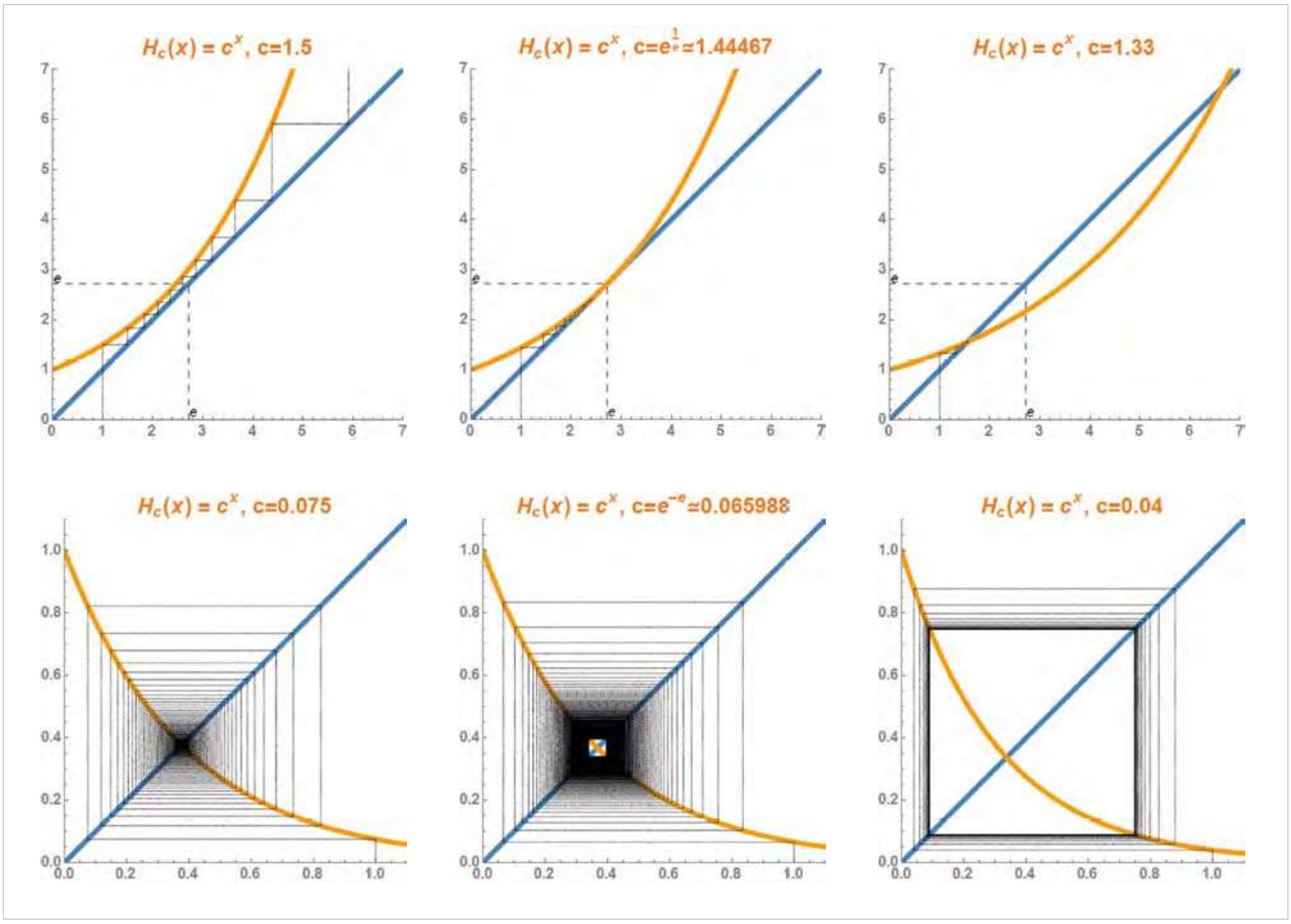

Figura 3. Órbitas de 1 por H_c.

b tais que $a^{1/a} = b^{1/b}$, ou seja, $a^b = b^a$. Para descrever o lugar geométrico de tais pares (a, b), usemos o feixe de retas $y = tx$ com declive $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ como um radar para os detetar no 1º quadrante de $\mathbb{R}^2$. Para cada t, determinamos a interseção das condições $y = tx$ e $x^y = y^x$ resolvendo em conjunto as equações $y/x = t$ e $x^{y/x} = y$; as soluções descrevem a curva α em $(\mathbb{R}^+)^2$ representada na figura 2 e parametrizada por

$$t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \quad \mapsto \quad \left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right).$$

O traço de α é simétrico relativamente à bissetriz do 1.º quadrante, uma vez que, se fixarmos $t > 0$ e o par correspondente $(a, b) = (t^{1/t-1}, t^{t/t-1})$ de α, então $1/t$ determina o ponto (b, a) da mesma curva. Além disso, $\alpha(t)$ converge para (e, e) quando t tende para 1. Note-se ainda que as coordenadas dos pontos desta curva são ambas estritamente maiores do que 1, propriedade que resulta de só surgirem tais pares com abcissas no subconjunto $]1, +\infty[$ do domínio da função f. Se ao traço de α juntarmos a semireta $\{(a, a) : a \in \mathbb{R}^+\}$, obtemos o conjunto $\mathcal{A}$ de todos os pares $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tais que $a^b = b^a$.

Os dois ramos de $\mathcal{A}$ intersetam-se precisamente em (e, e) e dividem $(\mathbb{R}^+)^2$ em quatro regiões, em cada uma das quais o sinal da diferença $a^b - b^a$ se mantém constante. Em particular, como a reta vertical $x = e$ só interseta as regiões em que este sinal é positivo, concluímos que, para todo o $0 < x \neq e$, se tem $e^x > x^e$ (de que a desigualdade $e^\pi > \pi^e$ é talvez o caso mais famoso).

A abcissa de cada ponto (a, b) do traço de α satisfazendo $e < b$ é a imagem de $f(b)$ pela inversa da restrição da função f ao intervalo $]0, e[$. Mais precisamente, dado $c \in]1, e^{1/e}[$, existe um e um só $b > e$ tal que $f(b) = b^{1/b} = c$; se agora resolvermos a equação $a^{1/a} = c$ com a incógnita $a \in]1, e[$, determinamos o outro valor do domínio de f, $1 < a < e$, tal que $f(a) = f(b) = c$. E é precisamente este valor único a de $]1, e[$ que nos leva de volta à questão inicial de Condorcet. De facto, se a sucessão $c^c, c^{c^c}, c^{c^{c^c}}, \ldots$ convergir para um real $a = a(c) \in]1, e[$, então, por continuidade da função exponencial, tem-se $c^a = a$. Isto é, $c = a^{1/a}$. E, portanto, se $g :]1, e^{1/e}[\to]1, e[$ é a função que a cada c associa o limite da sucessão c^c, c^{c^c}, $c^{c^{c^c}}, \ldots$, tem-se $g(f(a)) = a$ para todo o $a \in]1, e[$ e $f(g(c)) = c$ para todo o $c \in]1, e^{1/e}[$. Resta-nos confirmar que, para estes valores de c, a sucessão c^c, c^{c^c}, $c^{c^{c^c}}, \ldots$, converge e o limite está em $]1, e[$.

Analisemos na figura 3 o comportamento da sucessão c^c, c^{c^c}, $c^{c^{c^c}}, \ldots$, para $c > 0$. Esta sucessão é a órbita de 1 pelo sistema dinâmico gerado pela função

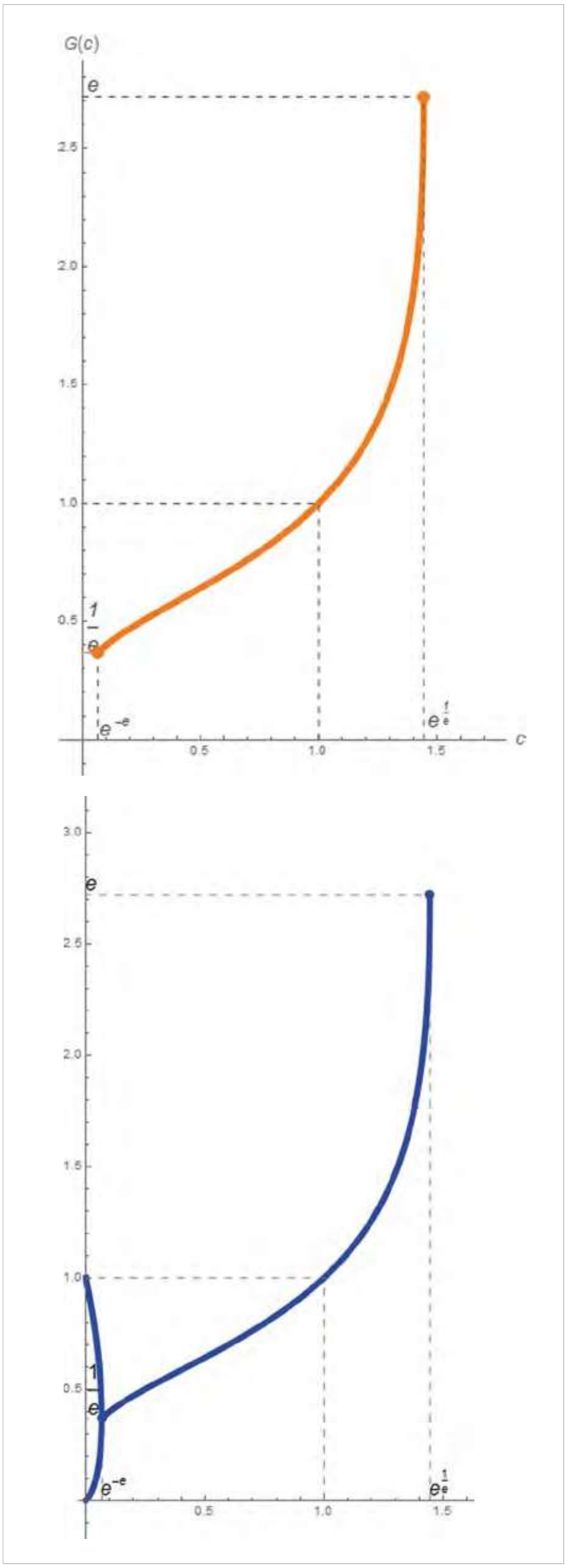

Figura 4. Gráfico de G e atractores de H_c.

$H_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H_c(x) = c^x$, isto é, a sucessão $(H_c^n(1))_{n \in \mathbb{N}_0}$, sendo $H_c^n = H_c \circ H_c \circ \ldots \circ H_c$ a composição de H_c consigo mesma n vezes, se $n \in \mathbb{N}$, e $H_c^0 =$ função identidade de $\mathbb{R}$. Os iterados da função H_c sugerem (e o leitor pode ler uma demonstração em [1]) que, no que respeita ao comportamento assimptótico da órbita de 1, o domínio $\mathbb{R}^+$ dos valores de c se divide em três regiões

$$\mathcal{C}_2 = \left]0, \frac{1}{e^e}\right[, \quad \mathcal{C}_1 = \left[\frac{1}{e^e}, e^{\frac{1}{e}}\right] \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_\infty = \left]e^{\frac{1}{e}}, +\infty\right[$$

tais que, se $c \in \mathcal{C}_\infty$, então o limite de $(H_c^n(1))_{n \in \mathbb{N}_0}$ é $+\infty$; se $c \in \mathcal{C}_1$, então a sucessão $(H_c^n(1))_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge e o limite é um ponto fixo de H_c, que pertence a $]1, e[$ quando $c \in\,]1, e^{1/e}[$; se $c \in \mathcal{C}_2$, então a sucessão $(H_c^n(1))_{n \in \mathbb{N}_0}$ tem dois pontos de acumulação, $\ell_1 = \ell_1(c)$ e $\ell_2 = \ell_2(c)$, que formam uma órbita periódica de H_c com período 2 (isto é, $H_c(\ell_1) = \ell_2$ e $H_c(\ell_2) = \ell_1$). Em particular, concluímos que a abcissa do ponto (a, b) do traço da curva α tal que $b > e$ satisfaz a equação

$$a = g(b^{\frac{1}{b}}) = b^{\frac{1}{b}\, b^{\frac{1}{b}\, b^{\frac{1}{b}\, b^{\frac{1}{b}\, \cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

A figura 4 mostra o gráfico da função inversa da restrição de f a $[1/e, e]$, ou seja, de $G : [1/e^e, e^{1/e}] \to [1/e, e]$ tal que $G(c) =$ limite da sucessão c^c, c^{c^c}, $c^{c^{c^c}}$,..., (e que coincide com g em $]1, e^{1/e}[$). Como vimos, este gráfico também descreve a variação do ponto fixo de H_c que está no intervalo $[1/e, e]$, para valores de c em $[1/e^e, e^{1/e}]$. Juntámos a esta imagem uma outra com o traço da curva $c \in\,]0, 1/e^e[\, \mapsto (\ell_1(c), \ell_2(c))$ que descreve a variação com c dos pontos periódicos de período 2 da função H_c que atraem a órbita de 1.

A pergunta sobre a convergência da sucessão c^c, c^{c^c}, $c^{c^{c^c}}$,... pode colocar-se também para valores complexos de $c \neq 0$. Ultrapassada a dificuldade inicial de escolher um ramo do logaritmo, podemos analisar como anteriormente a órbita de 1 pela função complexa $\mathcal{H}_c : z \to e^{z \log(c)}$. Nas figuras 5 e 6, obtidas com um módulo interativo que o Atractor disponibiliza em [1], podem ver-se imagens aproximadas do conjunto $\mathcal{M}$ dos números complexos $c \neq 0$ tais que a órbita de 1 por $\mathcal{H}_c$ é limitada. Estas imagens sugerem várias propriedades de $\mathcal{M}$, algumas ainda por demonstrar. Por exemplo, des-

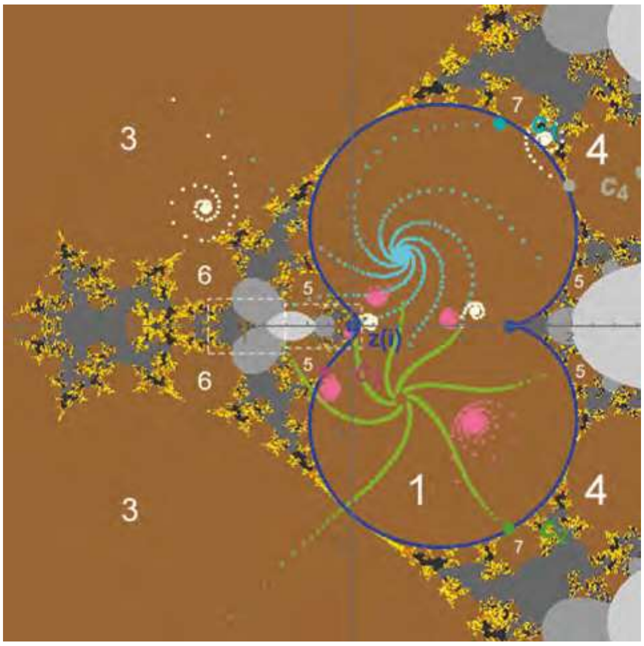

Figura 5. D_1, alguns períodos e a órbita de 1 para H_{c_i}, para $i = 1, 2, 3, 4$.

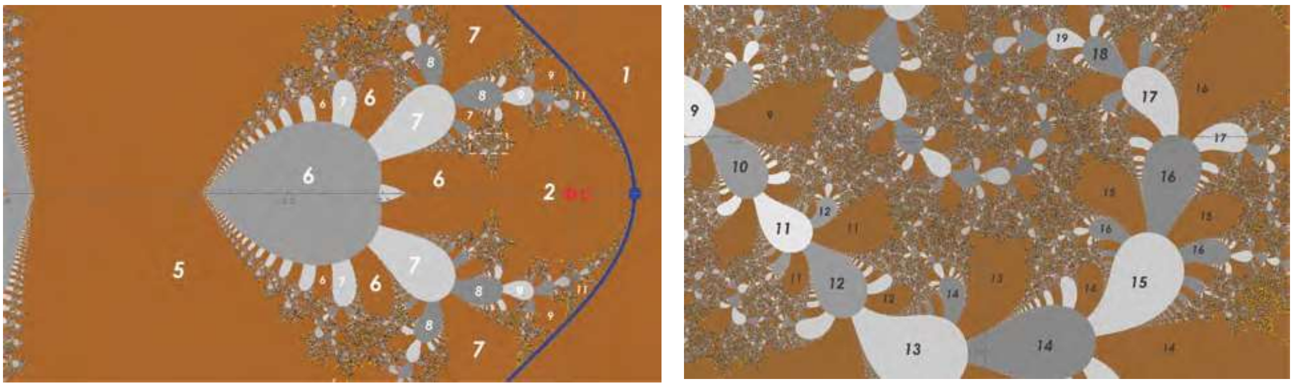

Figura 6. **À esquerda:** detalhe do retângulo direito da figura 5. **À direita:** Ampliação do retângulo na figura ao lado.

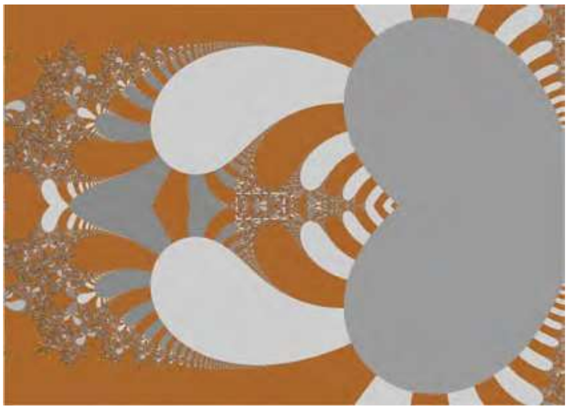

Figura 7. Detalhe da figura 5.

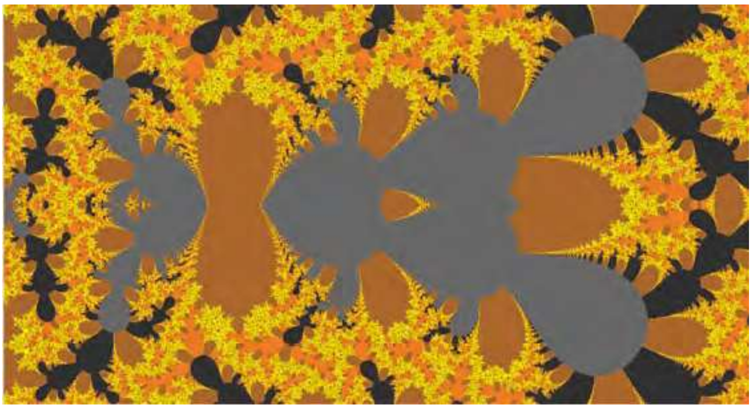

Figura 8. Ampliação do retângulo da figura 7.

tacam-se nele componentes $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tais que D_k agrupa os valores de c para os quais a sucessão c^c, c^{c^c}, $c^{c^{c^c}}$,... tem exatamente k pontos de acumulação, que formam uma órbita periódica de período k por $\mathcal{H}_c$. Não se sabe se a união $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$ é densa no plano.

REFERÊNCIAS

[1] *http://www.atractor.pt/mat/dinamica_exponenciais*