No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu *site* *www.atractor.pt* . Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

GIRAR SEM CAIR

Num cone de revolução, rodando em torno do seu eixo vertical, existe uma geratriz tubular sem atrito com uma bola lá dentro (ver figura 1). O que acontece a essa bola?

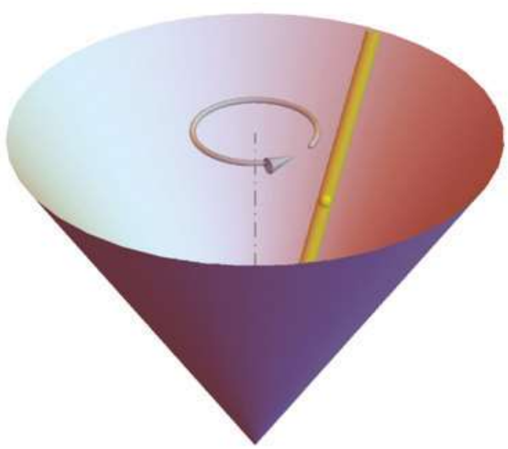

Figura 1.

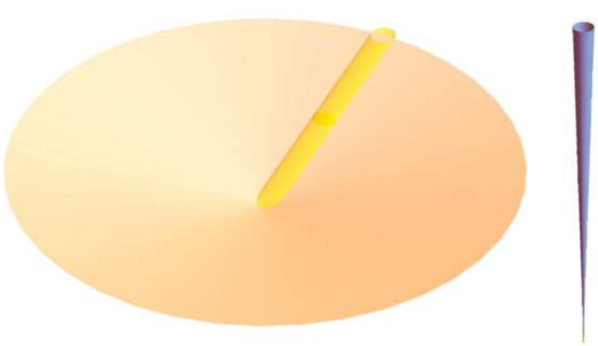

Figura 2.

Na figura 2 estão representadas duas situações extremas, cujo desfecho é previsível: na primeira, o cone tem uma abertura enorme, quase vindo a identificar-se com o plano, e na segunda, o cone tem uma abertura muito pequena, quase identificando-se com a linha vertical, que é o eixo de rotação. Conjeturamos naturalmente que no primeiro caso a ação da gravidade é diminuta e qualquer pequena giração será suficiente para provocar o afastamento da bola relativamente ao eixo de rotação, e no segundo caso será o oposto: mesmo para rotações rápidas e posições não próximas do vértice do cone, é plausível a queda da bola sob o efeito da gravidade. Para tornarmos mais precisas estas afirmações, vamos considerar o caso geral, designando por α o ângulo da geratriz com o eixo do cone e identificando a bola a um ponto dessa, onde se concentra a massa m. Interessa-nos calcular as componentes, segundo a direção dessa geratriz, de duas forças nele atuando: a força da gravidade e a força devida à giração. A primeira componente não depende do ponto na geratriz, mas apenas da abertura do cone (ver figura 3, página seguinte), sendo o seu valor $-\,mg\cos\alpha$; e a segunda é dada por $mx\omega^2 \operatorname{sen}\alpha$, onde o símbolo x representa a distância do ponto ao eixo e ω a velocidade angular com que o cone gira. O sentido positivo foi escolhido como o correspondente a um maior afastamento do ponto de massa m do vértice. A figura 4 representa os gráficos das duas funções (da gravidade em vermelho e de giração em azul) e da sua soma (em verde) quando variamos a distância x. Note-se que a função soma só se anula uma vez e, portanto, há uma única posição do ponto de massa m em que a força resultante é nula, ponto esse dependente da abertura do cone e da velocidade angular de rotação[1]. À direita desse ponto, o movimento é para fora e à esquerda predomina a ação da gravidade. O ponto é, pois, de equilíbrio instável: pontos próximos dessa posição tendem a afastar-se dela. Na figura 4 está também representada, a traço mais grosso, uma geratriz, com indicação do seu ângulo α com a vertical; as cores usadas distinguem o sentido da resultante das componentes da força segundo a direção dessa geratriz. Na figura 5 estão representados gráficos que dão os valores da distância do ponto de equilíbrio ao eixo, na parte da esquerda em função da abertura do cone para vários valores da velocidade angular, e na da direita em função da velocidade angular para vários valores da abertura.

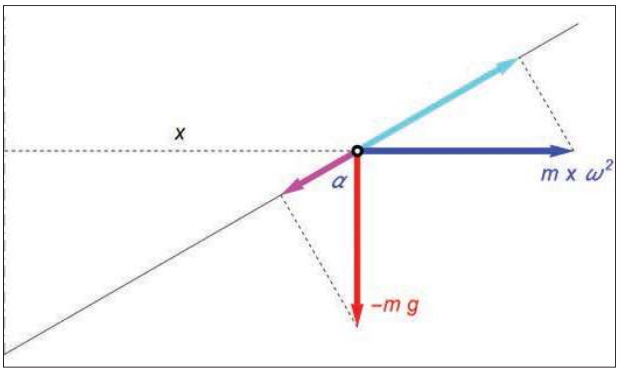

Figura 3.

Como fazemos se quisermos encontrar um modelo semelhante a este, em que continue a haver apenas um ponto de equilíbrio, mas em que esse ponto seja estável?

Consideremos uma curva como a representada na figura 6 e a superfície de revolução gerada por essa curva, quando ela roda em torno do eixo representado na figura. Obtemos, em vez do cone, a superfície representada na figura 7.

Neste exemplo, é essencial considerar um ponto movendo-se dentro de um tubo com a forma da curva geratriz da superfície[2]. Observemos que essa rotação, juntamente com a ação da gravidade, começa por ter uma resultante (segundo a direção da tangente) num sentido crescente; no entanto, a partir do ponto da curva com tangente vertical, tanto a gravidade como a ação de rotação têm componentes segundo a tangente, ambas com o mesmo sentido (contrário ao de partida).

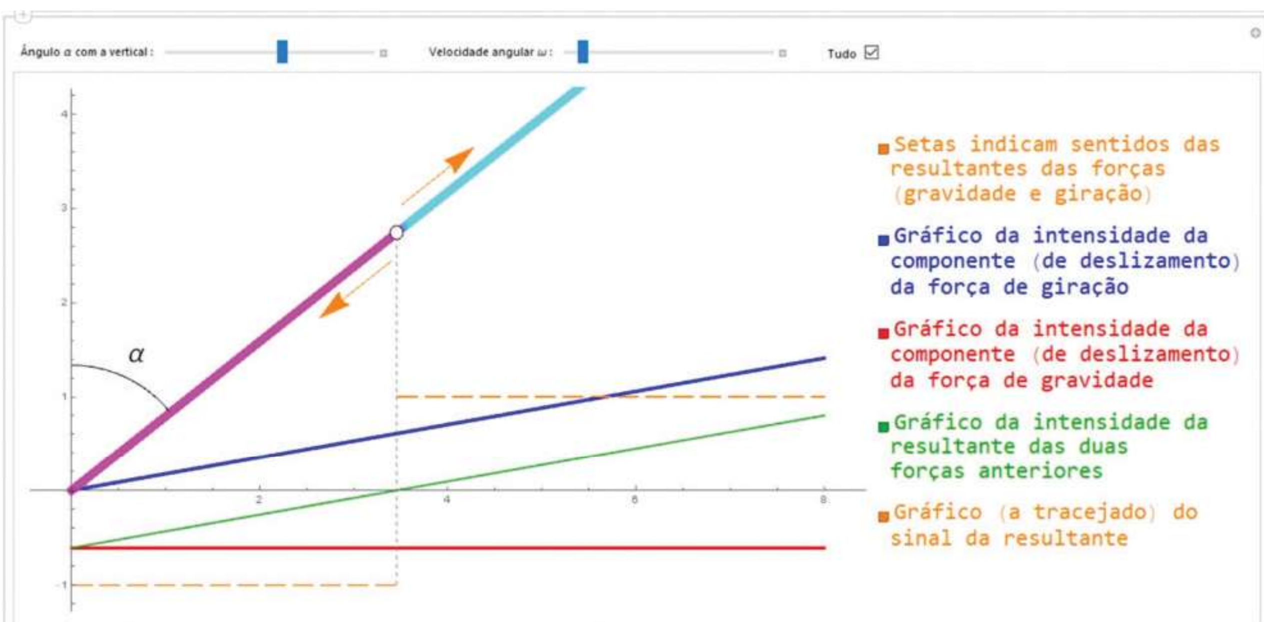

Figura 4.

Na figura 8 estão representados com as cores análogas às da figura 4 os gráficos das novas funções e uma geratriz, e o único ponto de equilíbrio (para uma rotação não nula) é, agora, estável.

Vamos ver o que sucede se nos restringirmos a curvas que "não voltem para trás", em particular curvas que não tenham dois pontos diferentes numa mesma vertical. Para tal, substituímos a geratriz retilínea do cone por uma curva levemente ondulada (figura 9). O leitor poderá em [1] escolher a amplitude da ondulação e a respetiva frequência. Neste novo exemplo, há dois pontos de equilíbrio.

[1] Em [1] o leitor poderá utilizar um CDF para mudar os valores dos parâmetros e observar as alteraçoes provocadas.

[2] Um ponto na posição indicada na figura 6, com uma pequena velocidade de rotação, cairia sob a ação da gravidade, descolando-se da superfície, se não estivesse obrigado a permanecer no tubo representado nessa figura.

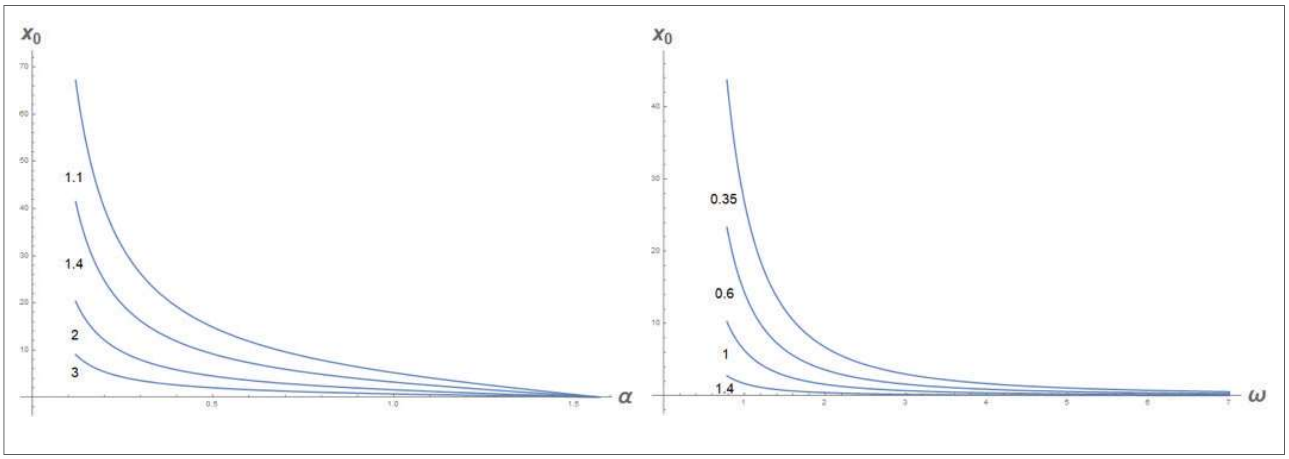

Figura 5.

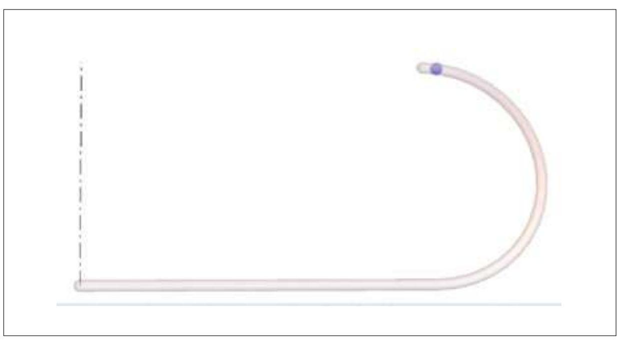

Figura 6.

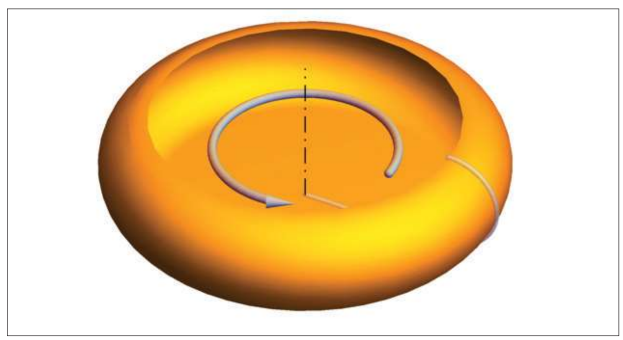

Figura 7.

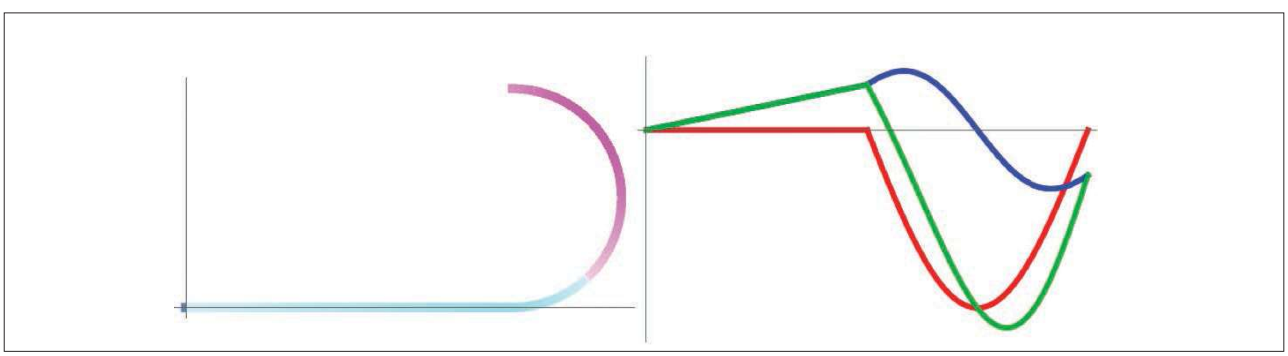

Figura 8.

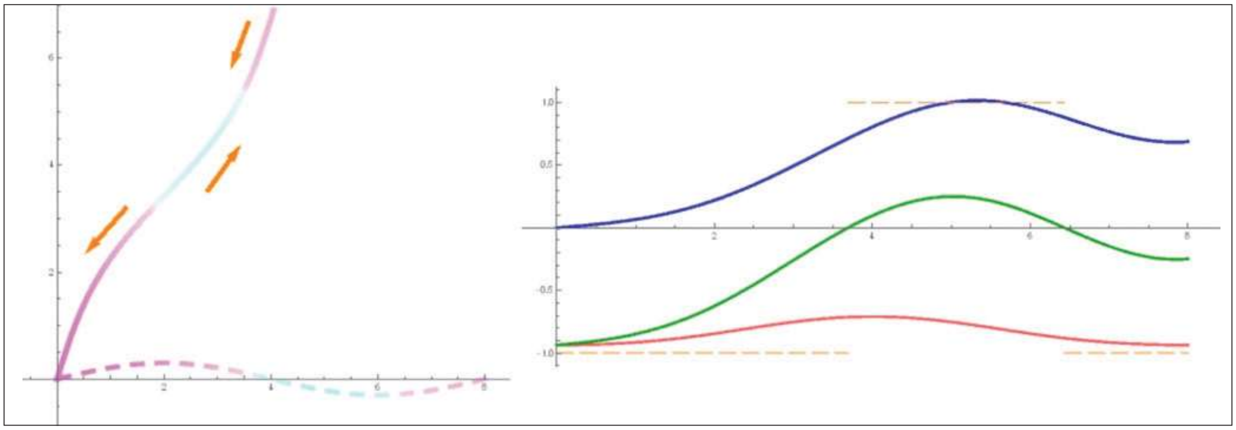

Figura 9.

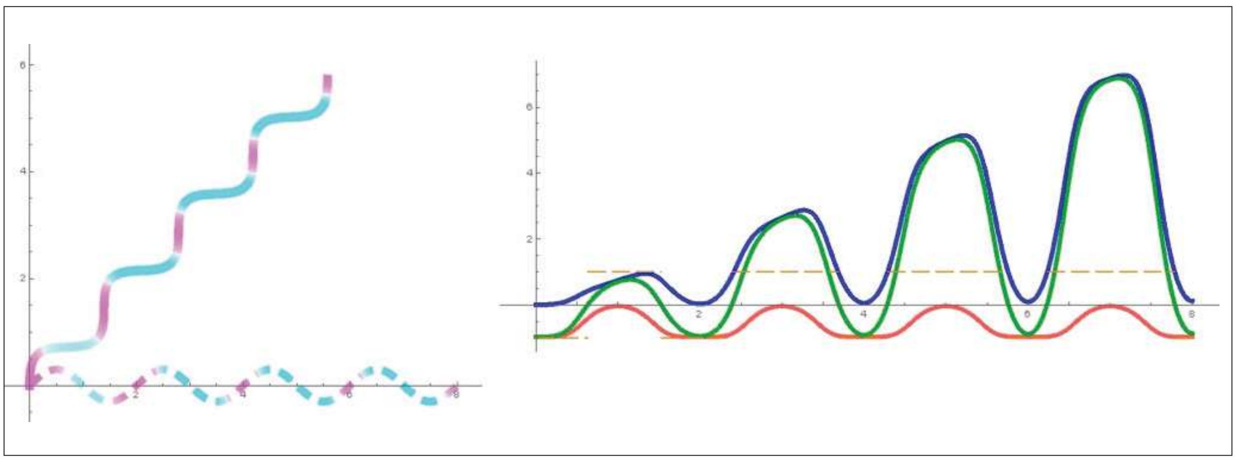

Figura 10.

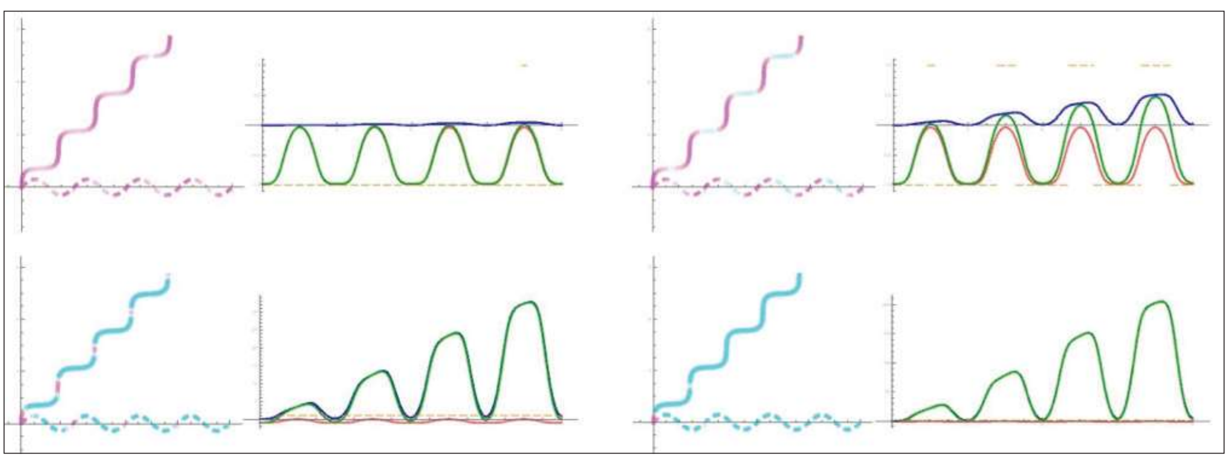

Figura 11.

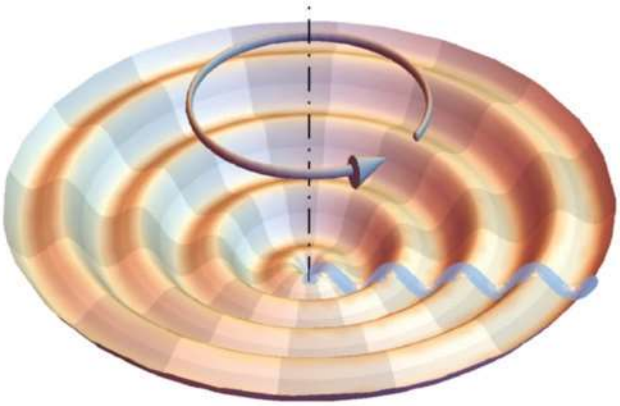

Figura 12.

Notemos que há um intervalo no qual o sinal da resultante (gráfico a verde) é positivo, sendo negativo à esquerda e à direita dele. Isso é traduzido na figura à esquerda pelas cores da geratriz nas diferentes regiões e pelas setas. A observação dessas setas permite detetar a natureza diferente dos equilíbrios correspondentes aos dois pontos de mudança de cor: enquanto no primeiro, pontos próximos tendem a afastar-se (equilíbrio instável), no segundo, pontos próximos tendem a aproximar-se (equilíbrio estável). Escolhendo um modelo análogo, mas usando uma curva com maior número de ondulações (ver figura 10), é possível aumentar o número de pontos de equilíbrio (estáveis e instáveis). O quadro da figura 11 ilustra o comportamento do mesmo cone ondulado girando a diferentes velocidades angulares (por ordem crescente): 0.3, 1, 8, 20, tendo a velocidade angular ilustrada na figura 10 o valor de 3.7. E finalmente a figura 12 mostra a superfície de revolução gerada pela curva ondulada.

Observemos que na geratriz da figura 10 há alternadamente patamares mais próximos da horizontal e escarpas íngremes mais próximas da vertical. Nas escarpas o efeito da força giratória é fortemente diminuído e nos patamares diminui o da gravidade. No exemplo em causa, para a velocidade angular envolvida, o sentido da força resultante muda no início e no fim das escarpas, e um equilíbrio é estável no início e instável no fim de cada escarpa.

Como nota final, mencionamos uma situação que se encontra com frequência e que está fortemente relacionada com o tema deste texto. Quando uma estrada é inclinada para dentro numa curva, o piso tem localmente a forma de um tronco de cone. E o ângulo com a vertical é planeado por quem projeta a estrada de forma a ter em conta o raio da curva (distância ao eixo) e a velocidade média prevista. O condutor que seguir a essa velocidade percorre uma zona de equilíbrio (instável, como vimos). Para outras velocidades, há que contar com as correções laterais devidas ao atrito entre pneus e estrada... (atrito esse que não foi contemplado no modelo do texto e que, aliás, é variável, por exemplo, com a chuva).

REFERÊNCIAS

[1] *https://www.atractor.pt/mat/girarsemcair*