No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu *site* *www.atractor.pt* .
Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

O QUE É UMA FIGURA SIMÉTRICA?

Simetria é um tema que tem sido usado amplamente pelo Atractor e que se presta a tratamentos informais acessíveis ao grande público. Mas, quando se pretende definir com precisão alguns dos conceitos envolvidos, há questões inesperadamente delicadas que surgem e é sobre algumas delas que vamos ocupar-nos neste texto.

Na figura 1 estão representadas quatro imagens, todas com algum tipo de regularidade relativamente a certas transformações do plano; para exprimir essa regularidade, começamos por introduzir a seguinte terminologia: diremos que uma imagem é invariante por uma transformação (injetiva) do plano se essa transformação enviar essa imagem exatamente sobre ela própria, mantendo inalterado o seu aspeto inicial. Uma tal transformação será designada neste texto por simetria (a definição final, mais exigente, será dada mais adiante).

Começando pela primeira linha da figura 1:

1. Na primeira imagem, a diagonal descendente do quadrado divide-o como um espelho, cada metade sendo a refletida da outra; a reflexão correspondente é uma simetria.
2. Na segunda, a meia-volta não altera o aspeto da imagem: é uma simetria.

Cada uma das outras duas imagens representa um friso (ilimitado) obtido por translações horizontais de parte do que está visível:

1. Em ambas, há translações horizontais que enviam cada "circunferência"/"pegada" numa seguinte e conservam o aspeto global da imagem (ilimitada); e cada tal translação é uma simetria dessa imagem (ilimitada).
2. Na segunda, há ainda uma reflexão numa reta horizontal, seguida de uma pequena translação, e essa transformação composta também é uma simetria da imagem.

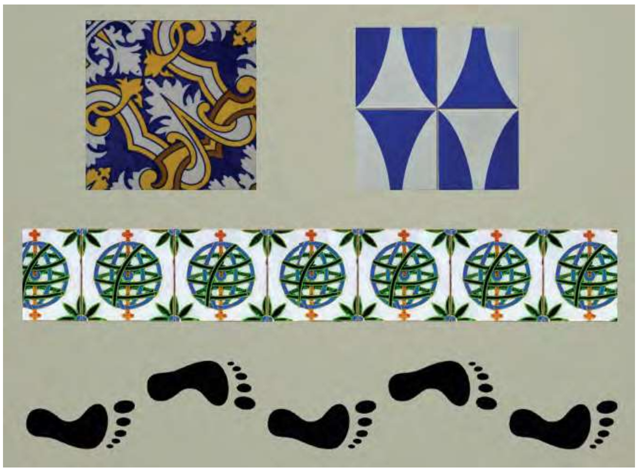

Figura 1.

Em todos estes casos, há entre as simetrias da figura uma que gera todas as outras, isto é, tal que todas as outras se obtêm dela ou da inversa por composições iteradas.

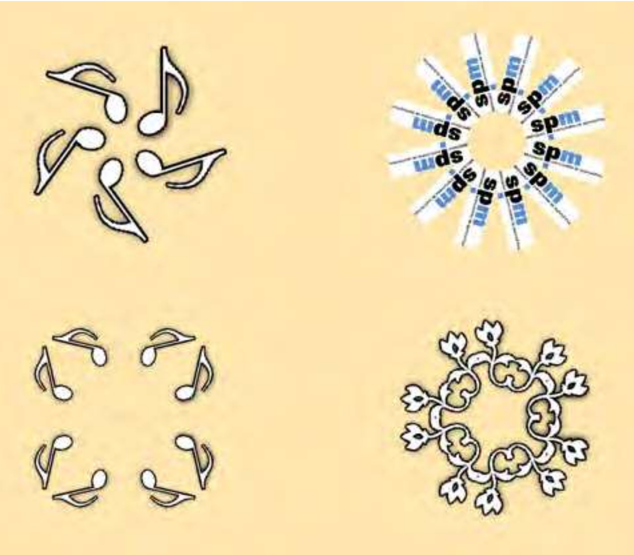

Figura 2.

A figura 2 tem:

1. Na primeira linha, dois exemplos, cada um tendo como simetrias rotações centradas num mesmo ponto: 5 na primeira e 12 na segunda (contando com a de 0º).
2. Na segunda linha, dois exemplos, cada um tendo como simetrias reflexões em eixos passando por um mesmo ponto: 4 na primeira e 5 na segunda e ainda, em cada caso, tendo como simetrias as rotações obtidas por composição dessas reflexões (também 4 e 5).

Nos exemplos analisados, encontrámos quatro tipos de simetrias: reflexões, rotações, translações e reflexões seguidas de pequenas translações com a direção do eixo de reflexão, ditas reflexões deslizantes. Há uma propriedade comum a todas estas transformações do plano: conservam distâncias, i.e., se os pontos A e B são transformados em A' e B', a distância de A a B é igual à de A' a B'. São isometrias. A primeira questão que se coloca é:

Q1. A propriedade "conservarem as distâncias" é ou não uma consequência de serem transformações que enviam certas imagens sobre elas próprias, conservando os aspetos das respetivas imagens?

Observemos uma das quatro imagens da figura 2. Parece que uma transformação que envie aquela imagem sobre ela própria não pode deixar de ser uma isometria. E, se nos restringirmos a transformações com um certo grau de homogeneidade de comportamento, por exemplo, transformações afins, a conclusão está correta para aquelas imagens. Mas isso não responde à questão Q_1. Consideremos um ponto numa reta; todas as homotetias de centro nesse ponto enviam a reta sobre ela própria e só duas das homotetias conservam distâncias... Portanto, temos uma resposta negativa a Q_1. No entanto, nos exemplos que considerámos nas figuras 1 e 2 e em todos os que vão interessar-nos, acontece que as figuras têm um conjunto de simetrias finitamente gerado, isto é, há um conjunto finito de simetrias tal que qualquer simetria se obtém por composição de algumas dessas. Note-se que o conjunto de todas as homotetias da reta, de centro fixo, não é finitamente gerado. Haverá algum contra-exemplo a Q_1 com um conjunto de simetrias finitamente gerado? Modifiquemos o anterior, escolhendo na reta dois pontos distintos, O e P, e considerando o conjunto dos homotéticos P_n de P, com centro O e razão 2^n, (ou k^n, $k > 1$), n inteiro qualquer. Este conjunto é enviado sobre si próprio por uma homotetia de centro O e razão 2 (k) e, além disso, as transformações em causa são todas geradas por ela. Qualquer dessas transformações envia o conjunto sobre si próprio e nenhuma delas conserva as distâncias, exceto o caso trivial da identidade, obtido para n=0. Temos, assim, uma resposta negativa a Q_1, mesmo quando todas as transformações são geradas por uma mesma. A figura 3 mostra uma imagem de um contra-exemplo análogo ao descrito e a de um outro conjunto no plano com propriedades semelhantes.

Em conclusão: se quisermos garantir que uma simetria seja uma isometria, temos de impor essa condição na definição. Eis a definição mais exigente adotada:

*Uma **simetria** de uma figura plana é uma isometria do plano que envia essa figura sobre ela própria.*

Será que já dispomos agora de uma definição clara e precisa de simetria, com a qual possamos trabalhar? Falámos em simetria de uma figura plana, mas o que é uma figura plana? Se essa "figura plana" só tiver uma cor, além da do fundo do plano, que podemos supor branco, dar uma figura é equivalente a dar a parte do plano cujos pontos são não brancos; e uma simetria dessa figura será uma isometria do plano que envia essa parte sobre ela própria. Mas, se a figura tiver mais de uma cor, como são definidas (com precisão) a figura e uma sua simetria?

Uma figura de quatro cores (azul, verde, vermelho, preto), com fundo de outra cor, consiste numa função *cor* do plano no conjunto de cores[1] (incluindo a do fundo). E uma simetria de uma tal figura colorida será uma iso-

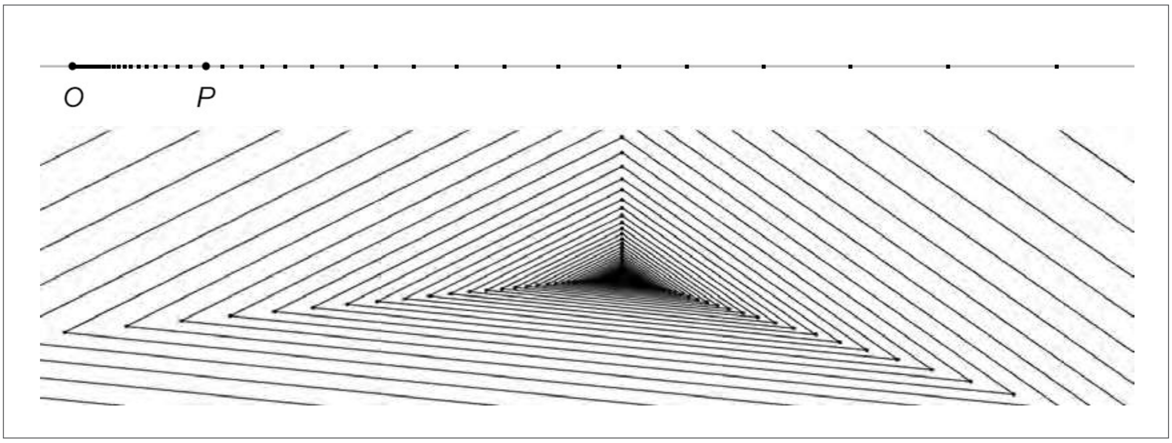

Figura 3.

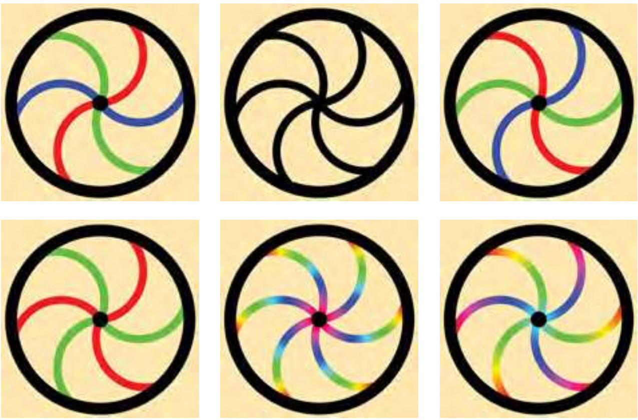

Figura 4.

metria f do plano tal que, para qualquer ponto p do plano, $cor(f(p)) = cor(p)$.

A figura 4 tem seis imagens coloridas, todas distintas, todas representando um mesmo quadrado centrado na origem (e supondo-se sempre que, fora desse quadrado visível, todos os pontos têm a cor do fundo). Vejamos quais são as simetrias, conforme a figura colorida colocada nesse quadrado.

Por exemplo, na primeira linha da figura 4 o conjunto de cores tem cinco elementos e há três imagens: a do centro tem claramente seis simetrias de rotação. E a da esquerda? Se a rodar a 60º obtenho a da direita, que "não coincide" com a primeira. Cada uma dessas figuras coloridas só tem duas simetrias: a identidade e a meia-volta em torno do centro da circunferência. Quanto à linha de baixo, começa por uma com três simetrias de rotação, as outras têm gradientes de cor: a do meio tem as mesmas simetrias que a preta de cima e a terceira, as mesmas da primeira dessa linha.

Note-se que, quer uma figura seja colorida quer não, a função identidade do plano é uma simetria da figura: é simultaneamente uma translação (de vetor nulo) e uma rotação (de ângulo nulo e centro em qualquer ponto). Na linguagem corrente, fala-se em figuras sem simetria como sendo aquelas que só têm essa simetria trivial. Conhecemos quatro tipos diferentes de simetrias não triviais no plano: translação, reflexão, rotação e reflexão deslizante. Observe-se que o facto de uma reflexão deslizante ter sido definida como a composta de uma reflexão com uma translação, ambas isometrias, faz com que ela seja automaticamente uma isometria. Então, é natural perguntar:

Q2 Compondo duas isometrias, cada uma de um dos quatro tipos até agora encontrados, poderemos obter um tipo de isometria ainda diferente de qualquer deles?

Note-se que foi algo desse género que aconteceu na discussão anterior: tínhamos dado exemplos de reflexões, translações e rotações e, ao considerarmos a composta de uma translação com um certo tipo de reflexão, encontrámos uma de um tipo diferente das três anteriores, a que demos o nome de reflexão deslizante.

Vamos dar uma ideia da razão pela qual a resposta a Q2 é negativa, e podemos mesmo afirmar que não existem isometrias do plano que não sejam de algum dos quatro tipos já encontrados. Notar que esta afirmação é *a priori* mais forte do que a anterior. Uma vez que uma simetria de uma figura é uma isometria, aquela resposta negativa implicará que, em particular, as simetrias de uma figura plana qualquer serão sempre de alguns dos quatro tipos indicados.

[1] Neste caso, cores={azul, verde, vermelho, preto, cor do fundo}, mas o conjunto das cores pode ser infinito; por exemplo, usando a notação standard RGBColor, cada cor é definida por um terno de números entre 0 e 1.

Recordemos que um terno (A,B,C) de pontos não colineares no plano define uma orientação, entre duas possíveis: positiva se, "olhando no sentido AB", o C estiver no semiplano da esquerda e negativa no caso contrário, este correspondendo ao sentido do movimento dos ponteiros de um relógio.

Consideremos dois pontos distintos quaisquer A, B e dois pontos A', B', tais que $d(A',B') = d(A,B)$:

1. (Unicidade) Começaremos por justificar as seguintes afirmações:
   a. Há no máximo uma isometria que envia A em A', B em B' e conserva a orientação.
   b. Há no máximo uma isometria que envia A em A', B em B' e troca a orientação.

Para qualquer ponto C do plano, uma (eventual) isometria que satisfaça as condições de a. ou b. vai necessariamente enviar C na interseção de duas circunferências centradas em A' e B' e raios $d(A,C)$, $d(B,C)$ (ver figura 5). Se C não for colinear com A, B, essa interseção é formada por dois pontos C' e C'', um em cada uma das duas regiões do plano definidas por $A'B'$, que correspondem a orientação positiva (de $A'B'C'$) e negativa (de $A'B'C''$)[2].

2. (Existência)
   a. Há uma rotação ou uma translação que envia A em A' e B em B'.
   b. Há uma reflexão deslizante (sentido lato) que envia A em A' e B em B'.

Para provarmos 2.a., consideremos primeiro o caso de AB ser paralela a $A'B'$; se o sentido for o mesmo, a translação pelo vetor AA' satisfaz o desejado, caso contrário o ponto médio C de AA' coincide com o de BB' e é a rotação de 180º centrada em C que envia A em A' e B em B' (segunda imagem da figura 6). Se as retas AB e $A'B'$ se intersetarem, as suas mediatrizes também se intersetam num ponto C e a rotação de centro C que envia A em A' também envia B em B'.

Provemos 2.b.: se as retas AB e $A'B'$ forem concorrentes (figura 7), uma vez desenhada a bissetriz do ângulo, a paralela por A' e a perpendicular por A intersetam-se em A'' e a mediatriz de AA'' será o eixo da reflexão deslizante com $A''A$ como vetor de deslizamento, que envia A, B em A', B'.

Utilizámos a métrica euclidiana[3] sempre que falámos em distâncias, em particular ao definirmos isometria. Há outras métricas no plano, topologicamente equivalentes,

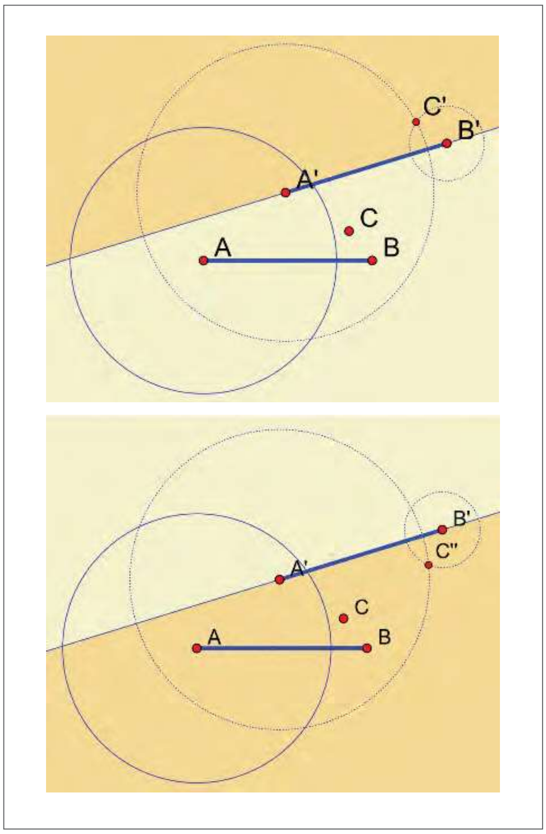

Figura 5.

como a métrica produto ou a métrica do táxi[4]. Por curiosidade, vamos ver que algumas das transformações que são isometrias para a métrica euclidiana deixam de o ser para a métrica do táxi. Por exemplo, a figura 8 representa (a azul) a circunferência de raio 1 centrada em A e (a verde) os pontos que distam 1 de A na distância do táxi. Para esta, C, rodado de B a 45º, está a uma distância de A superior a 1; conclusão: a rotação de 45º não é uma isometria para a métrica do táxi.

Todas as simetrias das quatro imagens da figura 1 são também simetrias para a métrica do táxi, mas o mesmo não acontece com as da figura 2: das quatro imagens, apenas a primeira da segunda linha conserva, na métrica do táxi, as mesmas simetrias da métrica euclidiana: quatro reflexões em eixos com ângulos 0, $Pi/2$, Pi, $3Pi/2$ e quatro rotações, compostas dessas reflexões duas a duas. Na figura 9, relativamente à métrica do táxi, estão indicadas quatro imagens: as da primeira linha exatamente com as mesmas simetrias (quatro rotações de múltiplos de $Pi/2$), e as da segunda linha ambas com as mesmas simetrias (quatro reflexões com eixos fazendo com a horizontal ân-

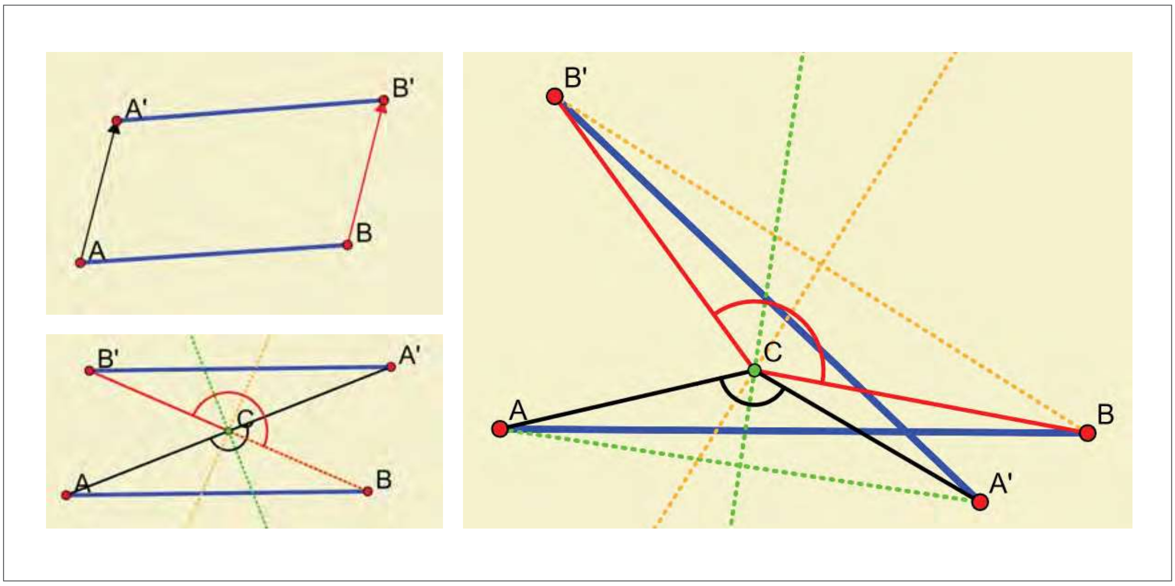

Figura 6.

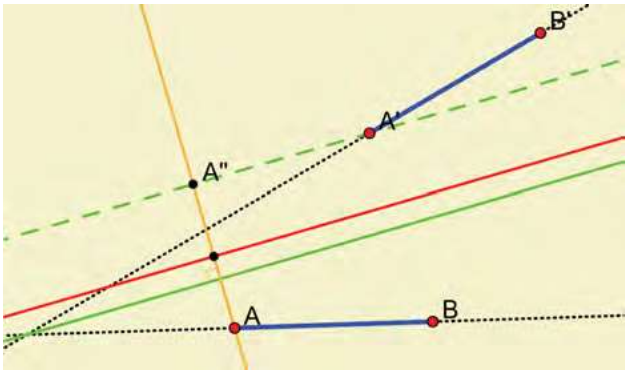

Figura 7.

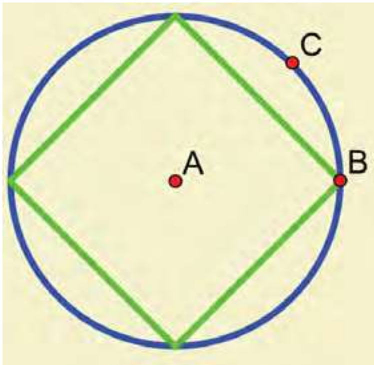

Figura 8.

gulos de múltiplos de $Pi/4$ e rotações delas decorrentes). Tem interesse destacar que a segunda imagem da primeira linha tem, na métrica euclidiana, o dobro das simetrias de rotação que tem na métrica do táxi e as outras três têm nas duas métricas exatamente as mesmas simetrias.

Em [1], o leitor poderá usar aplicações interativas e descobrir experimentalmente algumas das diferenças entre as métricas euclidiana e do táxi (e também da métrica produto).

[1] *https://www.atractor.pt/mat/simetrias*

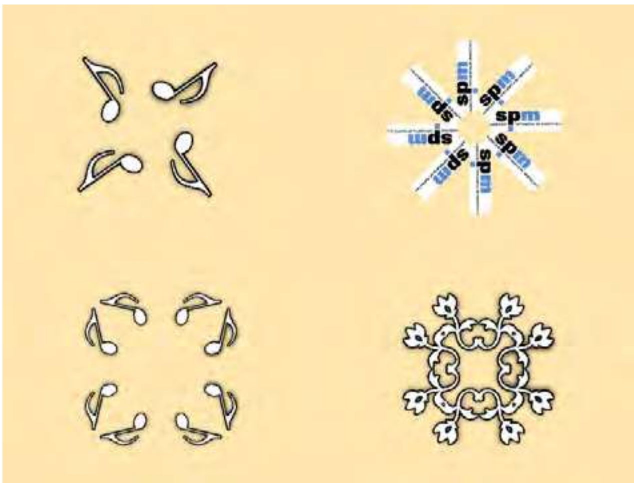

Figura 9.

[2] Em [1] poderá aceder a uma página interativa na qual poderá mover os pontos.
[3] Definida por $d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$
[4] Definida por $d((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|$