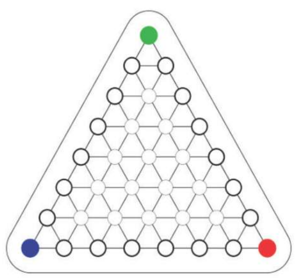
No âmbito de uma colaboração acordada entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site (www.atractor.pt). Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para atractor@atractor.pt.

Jogo de Sperner

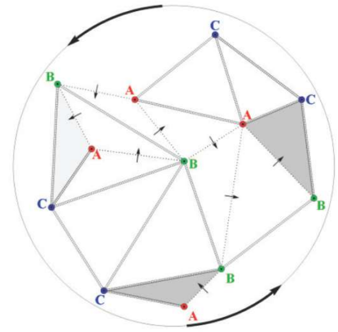
"When we play games we pass from the incomprehensible universe of given reality into a neat little man-made world, where everything is clear, purposive and easy to understand." Aldous Huxley

Em 1928, Emanuel Sperner publicou, numa revista da Universidade de Hamburgo, um lema combinatório de enunciado simples que veio a revelar virtudes e corolários insuspeitados. Nesse trabalho, Sperner apresenta uma prova alternativa de um teorema de Lebesgue que caracteriza o conceito de dimensão em espaços euclidianos, mas foi o resultado auxiliar, hoje conhecido como *Lema de Sperner*, que ganhou notoriedade. Trata-se de colorir os vértices da triangulação de uma região poligonal com três cores, de acordo com certa regra, e deduzir que, desse modo, há sempre um triângulo tricolor. Uma das muitas qualidades deste *Lema* é a de permitir formulações equivalentes, quase todas elementares, que elucidam sobre a natureza da propriedade que descreve e sobre a intervenção dos triângulos. Uma delas transpõe as hipóteses do *Lema* para as regras de um jogo, e a conclusão traduz-se no facto de, nesse jogo, nunca ocorrerem empates. E foi precisamente essa versão lúdica do *Lema* que o Atractor adoptou para construir na exposição *Matemática Viva* um módulo interactivo ([1]) que permita dar uma ideia correcta e completa, em linguagem não técnica, do que é uma demonstração, e conhecer este resultado ilustre. Vejamos os detalhes.



Consideremos uma região poligonal subdividida em triângulos, de modo que cada par de triângulos ou não tem pontos em comum ou partilha um vértice ou um lado inteiro. Os vértices da triangulação são os destes triângulos que pavimentam a região.

Segundo Sperner, *"se os vértices no bordo da região são coloridos com três cores A, B e C, se há no bordo lados com etiquetas A-B*[1] *e se todos estes lados A-B aparecem com a mesma orientação, então qualquer coloração dos vértices interiores com estas mesmas três cores produz sempre, pelo menos, um triângulo tricolor."*

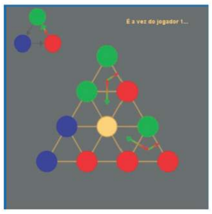


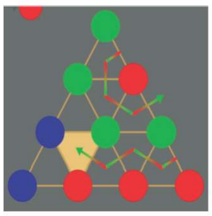
Uma demonstração sucinta, mas construtiva, consta da referência [2]. Imaginemos que a região poligonal é o chão de um palácio com quartos de formato triangular, sendo as portas os lados *A-B* (a ponteado na figura), dentro e no bordo, da região poligonal. Os outros lados são paredes do palácio. Há, por hipótese, portas exteriores que dão acesso ao edifício; entrando, tendo em conta a descrição das portas, que obriga a um caminho que deixa os vértices vermelhos sempre à esquerda, e prosseguindo até onde é possível, ou o nosso passeio termina no interior do palácio ou nos leva de volta ao exterior. Contudo, o último cenário é impossível porque, por hipótese, todos os vértices *A-B* no bordo têm a mesma orientação (ou seja, só permitem entrar). Como há um

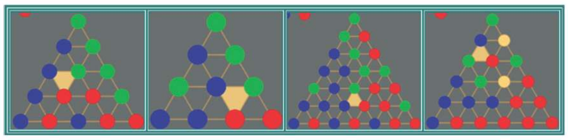
[1] Um lado tem etiqueta *A-B* se *A* e *B* são as cores dos seus vértices; a escolha da etiqueta corresponde à escolha de uma das duas ordenações possíveis desses vértices, ou seja, uma das duas orientações do lado.

número finito de quartos e o caminho não passa mais de uma vez pelo mesmo quarto (porque nele não pode haver três portas), o caminho tem de parar. O quarto final, onde o caminho termina, é um triângulo etiquetado com as três cores A, B e C.

O "Jogo de Sperner", entre dois jogadores, decorre num tabuleiro triangular, mas permite que a orientação no bordo não siga a exigência explicitada acima, admitindo que um caminho possa entrar no palácio e sair dele – o que naturalmente exige um argumento de prova mais minucioso. Em resumo, a região/palácio é um triângulo grande, de tamanho arbitrário, dividido em triângulos menores todos iguais, com os três vértices coloridos com três cores (vermelho, verde e azul). Cada jogador coloca alternadamente um disco colorido num dos vértices por colorir, de modo que: 1) em cada lado do bordo, o jogador só pode usar uma das duas cores dos vértices desse lado; 2) no interior do tabuleiro pode utilizar qualquer cor. Perde o jogador que completar um triângulo pequeno tricolor.



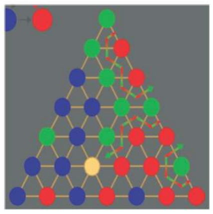




O texto de [1] é acompanhado de um *applet* em *java* que permite algum treino antes de se avançar para a questão mais importante: reparou se alguma vez o jogo terminou com um empate, isto é, sem nenhum vértice por colorir e sem ter entretanto surgido um triângulo pequeno com os três vértices com cores diferentes?

O *applet* encoraja o leitor a descobrir a resposta, exibindo os caminhos no palácio correspondentes às sucessivas jogadas.

E em [3] é fornecida a resposta e uma justificação. Se um caminho que entra pelo lado direito do triângulo grande não voltar a sair por este lado, então também não sai por nenhum dos outros dois lados do palácio, porque em nenhum deles há simultaneamente as duas cores A e B, que identificam uma porta; além disso, não passa duas vezes por um mesmo triângulo pequeno; e, como há um número finito de triângulos, o caminho tem de parar. Mas, para ser final, um triângulo pequeno tem de estar etiquetado com as três cores. O que falta para terminar esta prova? Garantir que há um percurso que não nos leva de volta ao exterior. Ora, para isso, basta contar as mudanças de cor que acontecem no lado direito do triângulo, registando a alternância na ordem em que as mudanças ocorrem e o facto de elas estarem associadas a entradas e a saídas permitidas por esse lado. Verifica-se, assim, pela escolha inicial das cores dos dois vértices desse lado, que o número de entradas excede sempre o número de saídas. Isso obriga à existência de, pelo menos, um caminho que entra pelo lado direito do triângulo e não pode sair. (Raciocínio análogo para qualquer um dos outros lados do tabuleiro.)



Do *Lema de Sperner* podem, por exemplo, deduzir-se, sem ter de se recorrer a matemática sofisticada, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (*Toda a função contínua de uma região poligonal convexa do plano em si mesma tem um ponto fixo*) e o Teorema da Esfera Cabeluda (*Um campo de vectores contínuo numa esfera tem sempre uma singularidade* – ou *toda a cabeça coberta de cabelo tem um corrupio*). O primeiro resultado consta da referência [4]; uma exposição do segundo a partir do *Lema de Sperner* está prevista para o *site* do Atractor, utilizando dois *applets*, esses já prontos ([5] e [6]). M

Referências

[1] http://www.atractor.pt/mat/Sperner

[2] **D.I.A. Cohen**, On the Sperner lemma, *J. Comb. Theory* 2 (1967) 585-587

[3] http://www.atractor.pt/mat/Sperner/sperner4.html

[4] **Yu. A. Shashkin**, *Fixed Points*, Mathematical World 2, AMS (1991)

[5] http://www.atractor.pt/mat/apli_sperner/hairyBall

[6] http://www.atractor.pt/mat/apli_sperner/hairyBallEsquema