ATRACTOR

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site *www.atractor.pt* . Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

ÁREAS E VOLUMES

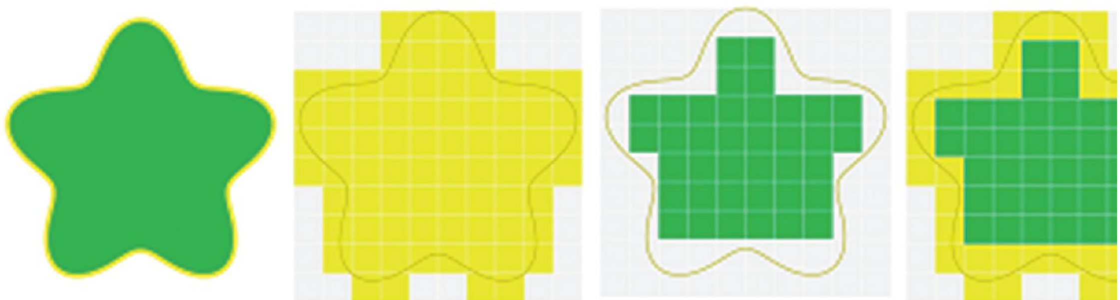
Na dedução da fórmula do volume de um prisma, a dificuldade está em provar que dois prismas com bases de igual área e alturas correspondentes iguais têm o mesmo volume. Cavalieri, aluno de Galileu, resolveu-a cortando-os em fatias.

Se um aluno do ensino básico ou secundário, ou alguém com preparação equivalente, perguntar como se justifica que uma certa fórmula permita calcular a área de uma determinada figura plana ou o volume de um sólido, como responder? Claro que não se pode confundir a resposta, seja ela qual for, com uma demonstração, como a entendem os matemáticos. Desde logo, porque seria necessário, para se poder proceder a uma demonstração, dispor de uma definição precisa de área ou de volume e essas noções requerem cuidados que não são acessíveis a esse nível. Mas é possível e desejável dar uma justificação, entendida como uma dedução a partir de outras propriedades básicas da noção de área e de volume, que facilmente serão aceites «intuitivamente» sem demonstração. Por exemplo, se se descrever um método que torne plausível a fórmula, nada evidente a priori, que dá o volume de uma esfera[1], isso é positivo, mesmo que esse método invoque sem demonstração algumas propriedades básicas e «intuitivas» das noções de área e volume.

Neste texto, exploram-se algumas propriedades que se revelam úteis em «justificações» entendidas no sentido acima descrito. As figuras são extraídas de conteúdos interactivos desenvolvidos pelo Atractor para o efeito.

NOÇÕES BÁSICAS

Partindo de um quadrado de lado unitário, ao qual atribuímos área 1, e subdividindo o lado em n segmentos de igual comprimento, definimos uma grelha que se estende a todo o



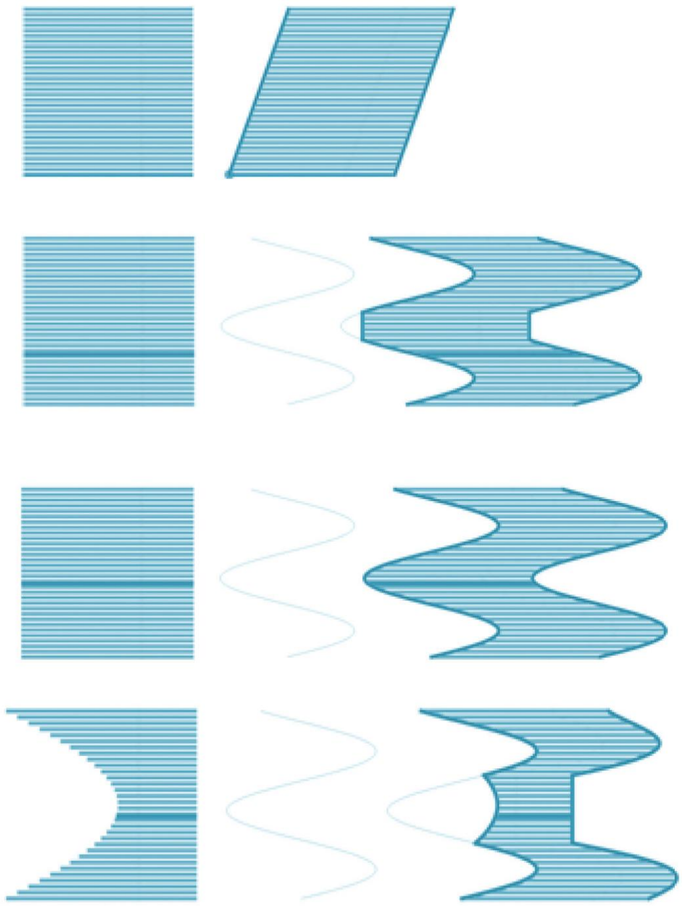
plano. Para qualquer reunião finita de k tais pequenos quadrados, a sua área define-se sem problemas: é k/n^2. A imagem seguinte sugere como se pode estender a noção de área a outros conjuntos do plano, por forma que sempre que um conjunto está contido noutro (ambos com área) a área do primeiro seja menor ou igual à do segundo.

Considerado o conjunto da esquerda nessa imagem e fixada uma grelha por subdivisão de um quadrado de lado unitário e por prolongamento ao plano, seguem-se: a amarelo, a reunião mínima de pequenos quadrados dessa grelha que contém o conjunto; a verde, a reunião dos pequenos quadrados nele contidos; a seguir ambas as reuniões conjuntamente; e depois, o conjunto da diferença dos dois anteriores; finalmente, a última figura (da direita) representa o mesmo que a precedente, mas para uma grelha (quatro vezes) mais fina.

Queremos, naturalmente, que a área (a definir) esteja compreendida entre as áreas, já conhecidas, da segunda e da terceira figuras, respectivamente a amarelo e a verde. Isto, para todas as grelhas, por mais finas que sejam. Ora, se, como parece neste caso – e realmente sucede –, as áreas representadas nas duas últimas figuras puderem ser tornadas tão pequenas quanto se quiser, apenas pela consideração de grelhas suficientemente finas, só haverá um número entre todos os associados aos conjuntos amarelos contendo a figura e todos os associados aos conjuntos verdes contidos na figura. Esse número é a área da figura inicial.

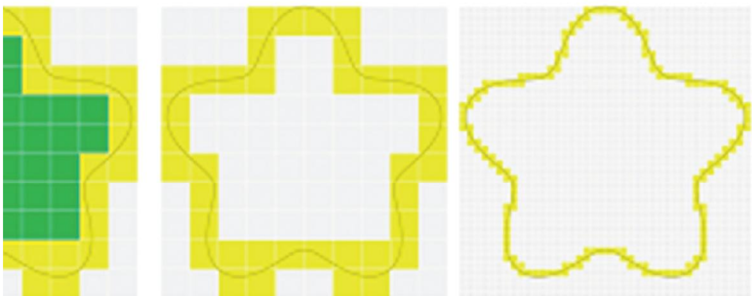
Como é que varia a área de um conjunto, quando se lhe aplica uma transformação do plano? Algumas transformações não alteram a área: é o caso das isometrias (que conservam distâncias), em particular das rotações, das translações e das reflexões. Outras alteram-na: por exemplo, uma homotetia de razão k conduz a uma figura cuja área é k^2 vezes a área da figura inicial. Olhando para as figuras anteriores, esta propriedade é clara para os conjuntos que são reuniões de quadrados da grelha e isso implica que também seja válida para os outros.

Há outra propriedade que importa destacar: dadas duas regiões planas limitadas[2], tais que qualquer recta horizontal as intersecta segundo segmentos com o mesmo comprimento, então as duas regiões têm a mesma área. Em particular, uma transformação que consista em «empurrar» uma região com uma curva, como indicado nas imagens seguintes, conserva a área:

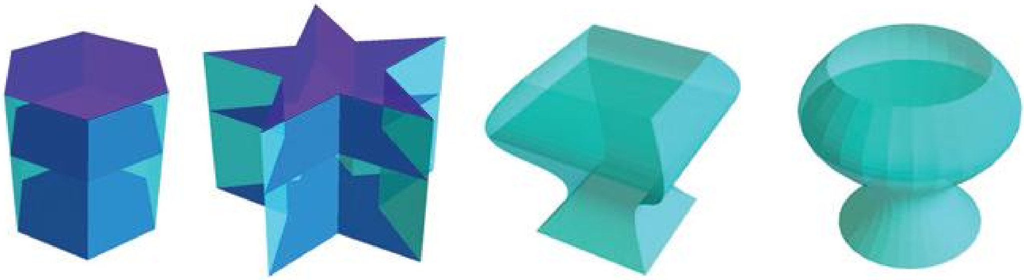


Nos três primeiros pares começa-se com um rectângulo, que é «empurrado» da esquerda, por um segmento inclinado no primeiro caso e por uma sinusóide vertical nos outros dois. No último grupo, a figura da esquerda não é seccionada pelas rectas horizontais segundo segmentos de largura constante, mas, a cada nível, o comprimento da secção é o mesmo na primeira figura e na segunda. Em todos os quatro pares, as áreas das duas figuras são as mesmas.

Para o volume de um objecto no espaço, são pertinentes considerações análogas às feitas para a área, uma vez adapta-



[1] Foi aliás uma pergunta de um aluno do 6º ano do Básico sobre a razão de ser de tal fórmula, que esteve na origem deste trabalho do Atractor.
[2] Estamos a supor que essas regiões têm áreas.

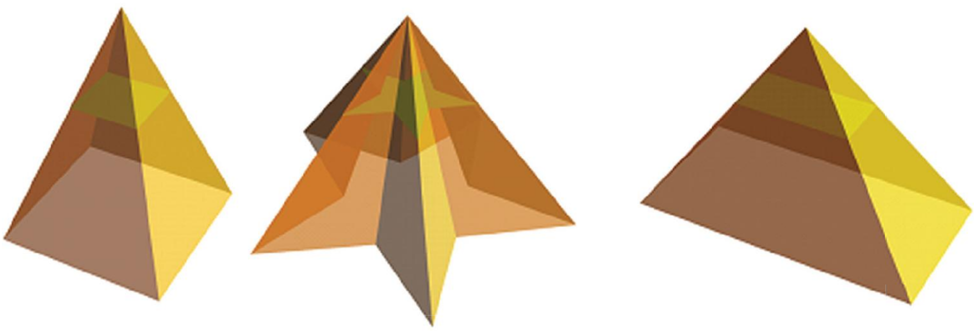


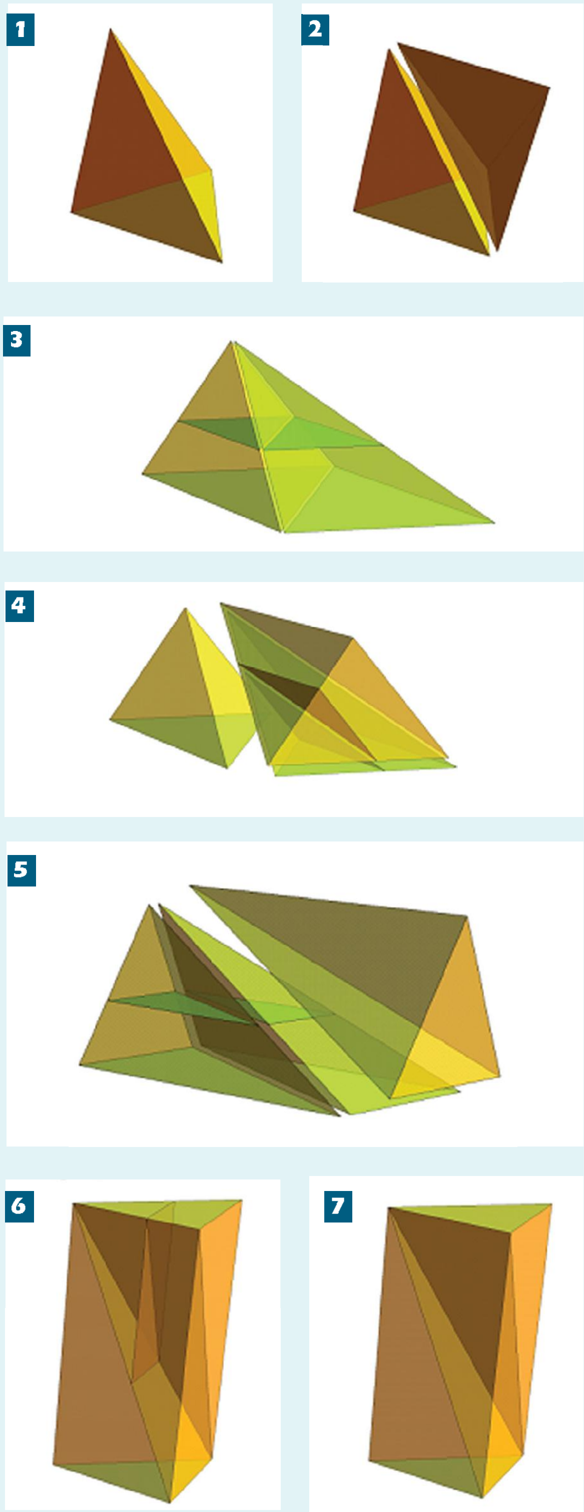
das à nova situação. Limitamo-nos a enunciar a adaptação da última propriedade descrita para a área: dados dois conjuntos limitados no espaço[3], tais que qualquer plano horizontal os intersecta segundo regiões planas com a mesma área, então os dois conjuntos têm o mesmo volume. Referindo-nos à figura acima, nos dois primeiros prismas, não só as áreas das secções ao mesmo nível são iguais, como essas áreas não dependem da altura do plano de corte. Já o mesmo não sucede com as duas outras figuras: cada plano horizontal corta figuras com a mesma área (um quadrado e um círculo), mas essa área é variável com a altura do plano. Em ambos os casos, a conclusão é a mesma: os dois prismas têm o mesmo volume e os dois outros sólidos têm os dois o mesmo volume.

Das propriedades indicadas decorre imediatamente que, para que quaisquer dois prismas ou cilindros de mesma altura, rectos ou inclinados, tenham o mesmo volume, basta que as bases, independentemente da forma que tiverem, tenham a mesma área. Um argumento muito simples permite concluir que, também para pirâmides e cones da mesma altura, o volume é idêntico, se as áreas das bases forem idênticas. Basta notar que todas as secções por planos paralelos à base são figuras homotéticas das bases, com uma razão de homotetia que só depende da altura do plano de corte. Portanto, se as bases de duas pirâmides (ou cones) têm a mesma área, também as secções têm as duas a mesma área, qualquer que seja a altura do plano de corte. Portanto, o volume de qualquer cone ou pirâmide só depende da área da base e da altura e, para o calcular, basta fazê-lo para uma pirâmide em particular, por exemplo, uma pirâmide de base triangular. A figura abaixo mostra vários sólidos com mesma altura: as áreas das bases dos sólidos são iguais, portanto as secções representadas, que estão à mesma altura, também têm entre si a mesma área, pelo que os volumes dos diferentes sólidos também são idênticos.

Vejamos agora como deteminar o volume de uma pirâmide de base triangular qualquer. Na figura da direita partimos de uma pirâmide (1), juntamos-lhe outra (2) com três vértices comuns à anterior[4] e o outro vértice na intersecção de paralelas a duas arestas da face mais próxima do observador na pirâmide dada (1). A imagem seguinte (3) mostra, de outro ponto de vista, as duas pirâmides, seccionadas por um plano paralelo às (novas) bases. Essas bases têm a mesma área, pelo que as duas pirâmides – a dada e a nova – têm o mesmo volume. Um processo idêntico ao anterior permite colar sobre a face mais próxima da segunda pirâmide (em 3) uma terceira pirâmide, com volume igual ao da segunda (4 e 5). As duas últimas imagens (6 e 7) mostram o prisma triangular obtido a partir da reunião das três pirâmides. Como elas têm todas o mesmo volume, concluímos que o volume da pirâmide inicial é um terço do volume de um prisma com a mesma base e a mesma altura, pelo que o mesmo sucede para qualquer pirâmide ou cone (ou dupla pirâmide ou duplo cone).

Num próximo texto veremos como proceder para determinarmos o volume da esfera.





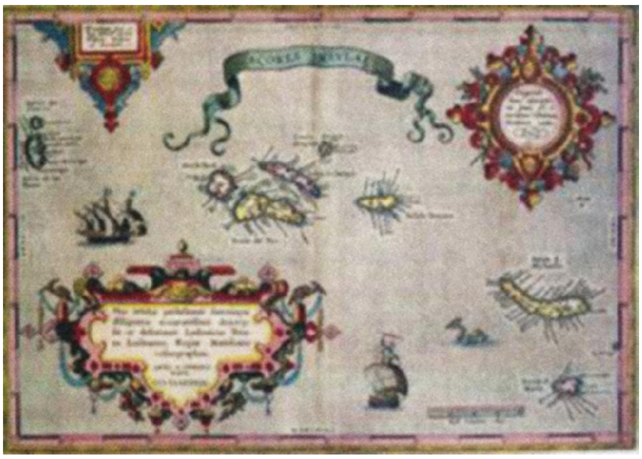
[3] Supomos também que esses conjuntos têm volume.
[4] Na figura, para melhor visibilidade, algumas pirâmides estão representadas um pouco afastadas.

RECREIO

JORGE NUNO SILVA
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

A **INFORMALIDADE** DA **LÓGICA FORMAL**

Raymond Smullyan é bem conhecido por ser um lógico e filósofo eminente. A sua obra mais popularizada, contudo, pertence à matemática recreativa. Nesta área são de leitura obrigatória "The Lady and the Tiger"(Dover, 2009), focado em *puzzles* lógicos, e "The Chess Mysteries of the Arabian Knights" (Oxford, 1992), um tratado de análise retrógrada em problemas de xadrez, para citar somente duas das suas muitas obras.



A mais recente publicação de Raymond Smullyan, "Logical Labyrinths" (AK Peters, 2009), é utilizada em Harvard num curso semestral de Lógica, contudo Smullyan continua a utilizar os *puzzles* como fio condutor e motivador da narrativa científica. O rigor e a profundidade da obra não saem diminuídos desta associação, antes colaboram na produção de um texto divertido e motivador que, partindo da informalidade de um quebra-cabeças, atinge toda a formalidade de lógica de primeira ordem.

A acção desenrola-se de início na já habitual ilha dos seres de dois tipos, os Verdadeiros, que falam sempre verdade, e os Falsos, que sempre mentem.

Os primeiros quebra-cabeças são clássicos. Vejamos dois exemplos.

1. No dia da sua chegada à ilha, o visitante Abercrombie encontra três habitantes: A, B e C. Pergunta a A: "Você é Verdadeiro ou Falso?", mas não ouve a resposta. Diz o B: "Ele disse que é um Falso", mas C acrescentou: "Não acredite em B, está a mentir". **O que é que se pode concluir sobre C?**