ATRACTOR

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site *www.atractor.pt* . Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

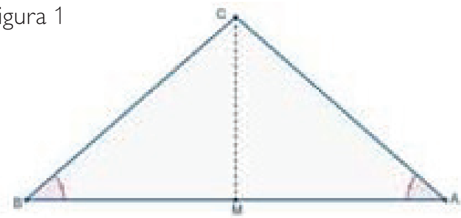
TRIÂNGULOS COM **ÂNGULOS MÚLTIPLOS**

Num triângulo plano $\triangle ABC$, a igualdade entre os ângulos $\angle B = \angle A$ é equivalente a uma relação simples entre os dois lados opostos a esses ângulos, $|AC| = |BC|$. E se $\angle B = n\angle A$ para algum natural n?

Esta foi a questão que Euler considerou em 1765 no artigo [2]. Euler começa por tratar alguns casos particulares, de $n = 1$ a $n = 5$, apercebendo-se de que há um padrão nas equações que vai obtendo, mas resume a apresentação aos valores de n até 13 e algumas afirmações que faz requerem uma justificação. Por isso, vale a pena regressar a este problema.

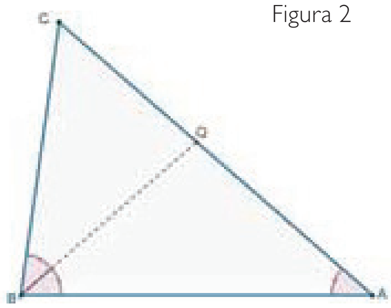
Dado um triângulo $\triangle ABC$, com vértices A, B, C, designemos por a, b e c os comprimentos dos lados opostos a A, B e C, respetivamente. Comecemos por supor que $\angle B = \angle A$ e tracemos o segmento CP perpendicular à reta que contém o lado AB, construindo desse modo dois triângulos, $\triangle APC$ e $\triangle BPC$, que são rectângulos e semelhantes. Além disso, têm em comum o lado CP , que se corresponde pela semelhança. E, portanto, são triângulos congruentes, com $a = b$. Reciprocamente, se $a = b$, consideremos o ponto médio M do lado AB (figura 1) e o segmento que o une a C. Os triângulos $\triangle AMC$ e $\triangle BMC$ são congruentes, logo, em particular, $\angle B = \angle A$.

Figura 1



Analisemos agora os triângulos $\triangle ABC$ (figura 2) tais que $\angle B = 2\,\angle A$. Se bissectarmos o ângulo $\angle B$ e considerarmos o ponto Q de intersecção dessa bissectriz com o lado AC, então os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BQC$ são semelhantes. Pelo Teorema de Tales, $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AB|}{|BQ|} = \frac{|BC|}{|CQ|}$, ou seja, $\frac{b}{a} = \frac{c}{|BQ|} = \frac{a}{|CQ|}$ e, consequentemente, $|BQ| = \frac{ac}{b}$ e $|CQ| = \frac{a^2}{b}$. Além disso, por construção, $|AC| = |AQ| + |CQ|$, isto é, $|AQ| = b - \frac{a^2}{b}$. E, no triângulo $\triangle ABQ$, tem-se $\angle B = \angle A$, logo $|AQ| = |BQ|$. Substituindo nesta igualdade os valores anteriores, obtemos $b - \frac{a^2}{b} = \frac{ac}{b}$, ou seja, $b^2 - a^2 = ac$. Reciprocamente, suponhamos que no triângulo $\triangle ABC$, de lados correspondentes a, b e c, vale a igualdade $b^2 - a^2 = ac$. Então $b > a$ e, portanto, no lado AC podemos fixar um ponto Q tal que o ângulo $\angle QBC$ é igual a $\angle A$. Desse modo, criamos um triângulo $\triangle BQC$ semelhante a $\triangle ABC$, logo, como vimos, $|BQ| = \frac{ac}{b}$, $|CQ| = \frac{a^2}{b}$ e $|AQ| = b - \frac{a^2}{b}$. Além disso, como por hipótese $b - \frac{a^2}{b} = \frac{ac}{b}$, isto é, $|AQ| = |BQ|$, sabemos que o triângulo $\triangle AQB$ é isósceles, com $\angle ABQ = \angle A$. Daqui resulta que, no triângulo $\triangle ABC$, se tem $\angle B = 2\,\angle A$. Com esta caracterização dos triângulos em que um ângulo é o dobro de outro, podemos, por exemplo, provar que existe exatamente um destes triângulos cujos comprimentos dos lados são inteiros

Figura 2



consecutivos[1]: é o que verifica $a = 4$, $b = 6$ e $c = 5$. Ou determinar expressões gerais para o seno e o cosseno de um ângulo duplo.

Por processo análogo, usando o que já sabemos para $n = 2$, podemos explicitar uma relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo em que um dos ângulos é triplo de outro.

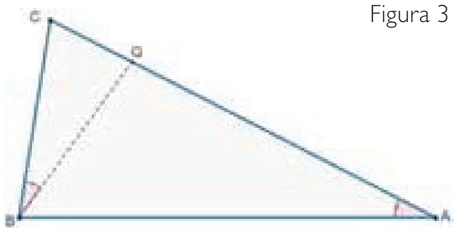


Figura 3

Seja $\triangle ABC$ (figura 3) um tal triângulo com $\angle B = 3\,\angle A$. Se trissetarmos o ângulo $\angle$B e considerarmos o ponto Q do lado AC tal que o ângulo $\angle QBC$ é igual a $\angle A$, então, de novo, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BQC$ são semelhantes, sendo $|BQ| = \frac{ac}{b}$, $|CQ| = \frac{a^2}{b}$ e $|AQ| = b - \frac{a^2}{b}$. Por construção, no triângulo $\triangle ABQ$, tem-se $\angle B = 2\angle A$, e portanto $|AQ|^2 - |BQ|^2 = |AB||BQ|$, ou seja,

$$\left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2 - \left(\frac{ac}{b}\right)^2 = \left(\frac{ac}{b}\right)\, c$$

o que é equivalente a $(b^2 - a^2)^2 - ac^2(a+b) = 0$ e, cancelando $a + b$, o mesmo que $(b^2 - a^2 + c^2)(b-a) - bc^2 = 0$.

Quanto à implicação recíproca, voltemos à referência [2]. Euler afirma que, se num triângulo $\triangle ABC$, de lados correspondentes a, b, c, vale a igualdade $(b^2 - a^2 + c^2)(b-a) - bc^2 = 0$ então $\angle B = 3\,\angle A$. A figura com que Euler pretende ilustrar esta afirmação só é possível se $b > a$. Esta é uma condição necessária para que o ângulo no vértice B seja triplo do do vértice A, mas não é consequência da hipótese $(b^2 - a^2 + c^2)(b-a) - bc^2 = 0$. Se, por exemplo, $a = 3$, $c = 2$ e b é a solução da equação $(b^2 - 5)(b-3) = 4b$ em $]1, \sqrt{5}[$, então a, b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo $\triangle ABC$, opostos aos vértices A, B, C, respetivamente, que verifica a condição $(b^2 - a^2 + c^2)(b-a) - bc^2 = 0$ mas em que $\angle B \neq 3\,\angle A$. Se, contudo, admitirmos que no triângulo $\triangle ABC$, de lados a, b, c, se tem $(b^2 - a^2 + c^2)(b-a) - bc^2 = 0$ e $b > a$, então podemos fixar no lado AC um ponto Q tal que o ângulo $\angle QBC$ é igual a $\angle$A. Desse modo, o triângulo $\triangle BQC$ é semelhante a $\triangle ABC$, com lados $|BQ| = \frac{ac}{b}$, $|CQ| = \frac{a^2}{b}$ e, portanto, $|AQ| = b - \frac{a^2}{b}$. Além disso, como por hipótese $\left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2 - \left(\frac{ac}{b}\right)^2 = \frac{ac}{b}c$, ou seja, $|AQ|^2 - |BQ|^2 = |AB||CQ|$, concluímos, pelo caso $n = 2$, que, no triângulo original $\triangle ABQ$, o ângulo $\angle ABQ$ é igual a $2\angle QAB$. Daqui resulta que, no triângulo $\triangle ABC$, se tem $\angle B = 3\angle A$.

O argumento geométrico anterior pode repetir-se para os outros valores de n. Designemos por $F_n(a,b,c) = 0$ a relação entre os lados, com comprimentos a, b e c, de um triângulo $\triangle ABC$ em que $\angle B = n\angle A$. Então, uma vez obtidas as expressões de F_j para $1 \leq j \leq 4$, a fórmula de recorrência que resulta deste processo indutivo é, para todo o natural $n \geq 4$, dada por

$$F_{n+1}(a,b,c) := \left(b^2 - a^2 + c^2\right)\, F_{n-1}(a,b,c) - b^2c^2\, F_{n-3}(a,b,c).$$

Reciprocamente, se $b > a$ e $F_n(a,b,c) = 0$, então $\angle B = n\angle A$.

Fixado $\mathcal{P} > 0$, na família de todos os triângulos com perímetro $\mathcal{P}$, há um que se destaca: o equilátero com esse perímetro, por ser aquele que engloba maior área. Para $n \geq 1$, designemos por $\mathfrak{T}_n$ o conjunto de triângulos $\triangle ABC$ tais que $\angle B = n\angle A$. Quando $n \geq 2$, o triângulo equilátero não pertence a $\mathfrak{T}_n$, e até só há dois triângulos isósceles neste conjunto: um com ângulos $\frac{\pi}{n+2}, \frac{n\pi}{n+2}, \frac{\pi}{n+2}$ e outro de ângulos $\frac{\pi}{2n+1}, \frac{n\pi}{2n+1}, \frac{n\pi}{2n+1}$. Qual é a solução, se existe, do problema isoperimétrico em $\mathfrak{T}_n$? Pela Lei dos Senos, em $\mathfrak{T}_n$ a área de um triângulo com perímetro $\mathcal{P}$ é dada por

$$\mathcal{A}(\angle A) = \frac{\mathcal{P}^2}{2}\,\frac{\sin(\angle A)\,\sin(n\angle A)\,\sin((n+1)\angle A)}{[\sin(\angle A) + \sin(n\angle A) + \sin((n+1)\angle A)]^2}$$

onde $\angle A \in]0, \frac{\pi}{n+1}[$. Observe-se que os pontos críticos de $\mathcal{A}$ não dependem do valor de $\mathcal{P}$ e que o denominador de $\mathcal{A}$ é positivo em $]0, \frac{\pi}{n+1}[$. Além disso, $\sin((n+1)\,\frac{\pi}{n+1}) = 0$ e $\lim_{\alpha \to 0} \mathcal{A}(\alpha) = 0$, e portanto a função $\mathcal{A}$ estende-se continuamente a $[0, \frac{\pi}{n+1}]$ se definirmos $\mathcal{A}(\frac{\pi}{n+1}) = \mathcal{A}(0) = 0$, embora estes casos extremos correspondam a triângulos degenerados. Sendo $\mathcal{A}$ contínua e valendo 0 nos extremos do domínio, tem máximo global atingido no interior do intervalo $[0, \frac{\pi}{n+1}]$. Com a página de *webMathematica* [1], podemos desenhar os gráficos da função área e da respetiva derivada para algumas escolhas de n. Por exemplo, para $n = 2$, eles permitem-nos prever que só um

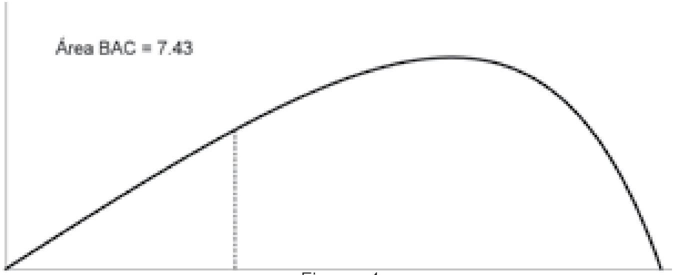


Figura 4

triângulo maximiza a área e que não é isósceles: tem ângulo $\angle A \sim 41$ graus, valor que, em radianos, se situa estritamente entre $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{\pi}{4}$. Para o confirmar, é mais simples usar a fórmula de Héron [3] que exprime $\mathcal{A}$ em função dos comprimentos dos lados e do perímetro fixado $\mathcal{P}$, e utilizar multiplicadores de Lagrange, beneficiando da caracterização $F_2 = 0$ descrita anteriormente.

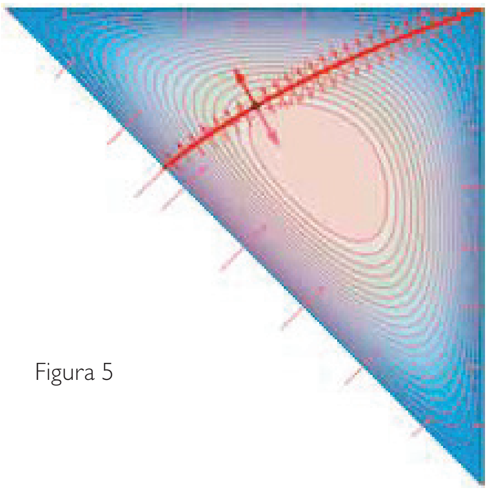


Figura 5

Fixado $\mathcal{P}$, queremos maximizar a função $\mathcal{A}(a,b) = \sqrt{\mathcal{S}\ (\mathcal{S}-a)\ (\mathcal{S}-b)\ (a+b-\mathcal{S})}$, onde $\mathcal{S} = \frac{\mathcal{P}}{2}$, no conjunto $\{(a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2 : g(a,b) = b^2 - 2a\mathcal{S} + ab = 0\}$. Como as duas componentes do gradiente de g, isto é $\frac{\partial g}{\partial a} = -2\mathcal{S} + b$ e $\frac{\partial g}{\partial b} = 2b + a$ não se anulam em $\mathfrak{T}_2$, basta encontrar os elementos (a,b) onde os gradientes de $f = \frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{S}}$ e de g são colineares. Esta dependência linear dos gradientes significa que o triângulo de área máxima que procuramos corresponde a um ponto de tangência de uma curva de nível de f com a curva de nível $g \equiv 0$.

Analisemos o sistema de equações $\nabla f = \lambda \nabla g$, com três incógnitas, a, b e λ, sujeito à restrição $g \equiv 0$:

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{S}-b)(2\mathcal{S}-2a-b) \\ (\mathcal{S}-a)(2\mathcal{S}-2b-a) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial a} \\ \frac{\partial g}{\partial b} \end{pmatrix}$$

$$g(a,b) = 0.$$

Como, pela desigualdade triangular, temos $\mathcal{S} = \frac{a+b+c}{2} > \frac{a+a}{2} = a$ e, analogamente, $\mathcal{S} > b$, das duas primeiras equações podemos desde já concluir que $2\mathcal{S} - 2a - b = 0$ se e só se $2\mathcal{S} - 2b - a = 0$, uma vez que os coeficientes de λ não se anulam. Mas o triângulo equilátero

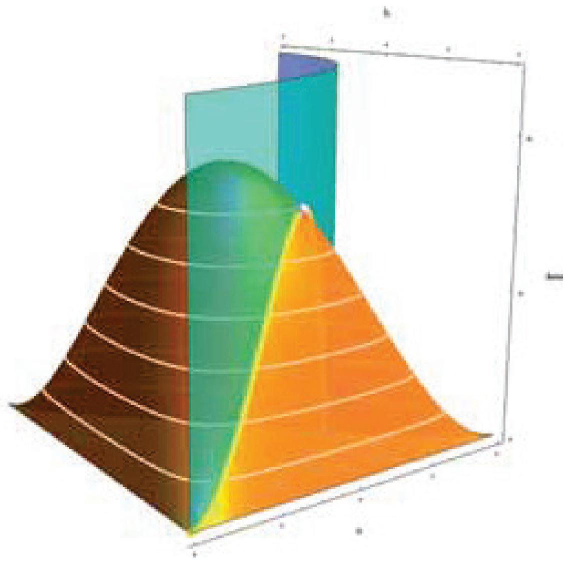


Figura 6

(correspondente a $2\mathcal{S} - 2a - b = 0 = 2\mathcal{S} - 2b - a = 0$) não pertence a $\mathfrak{T}_2$. Logo nenhuma das alternativas $2\mathcal{S} - 2a - b$ ou $2\mathcal{S} - 2b - a = 0$, que descrevem, em separado, os triângulos isósceles de $\mathfrak{T}_2$, serve para maximizar a área. O sistema tem uma única solução, sendo $\lambda = \frac{(\mathcal{S}-a)(2\mathcal{S}-2b-a)}{2b+a}$ e (a, b) o par que satisfaz as equações

$$\frac{(\mathcal{S}-b)(2\mathcal{S}-2a-b)}{-2\mathcal{S}+b} = \frac{(\mathcal{S}-a)(2\mathcal{S}-2b-a)}{2b+a}$$

e

$$b^2 - 2a\mathcal{S} + ab = 0.$$

No endereço *http://www.atractor.pt/mat/triang_multis* estão vários *applets* que permitem, variando $\mathcal{P}$ ou n, conjecturar sobre a resposta no caso geral, além de uma versão mais detalhada deste texto.

REFERÊNCIAS

[1] Atractor, "webMathematica no Atractor", *Gazeta de Matemática* 155 (2008) 3-4.

[2] L. Euler, "Proprietates triangulorum, quorum anguli certam inter se rationem tenent", *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,* Vol. XI 1765, (1767) 67–102.

[3] I. Niven, "Maxima and Minima without Calculus", *Dolciani Mathematical Expositions* 6, MAA, 1981.

[1] Problema proposto, em 1968, nas Olimpíadas Internacionais de Matemática.