

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu site www.atractor.pt.
Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para atractor@atractor.pt

DINÂMICA DE UM TRUQUE

Caro leitor: Pense num número natural abc com três dígitos, sendo $a \neq c$. Depois, secretamente, inverta-o, obtendo cba , e calcule a diferença do maior pelo menor. Bastará agora que nos indique o primeiro dígito dessa diferença para lhe revelarmos o resultado.

Descobrimos por que funciona o truque anterior se o experimentarmos. Por exemplo, se $abc = 165$, então $cba = 561$ e $cba - abc = 396$; se $abc = 990$, então $cba = 099$ e $abc - cba = 891$; em geral, nas condições pedidas pelo truque, a diferença $abc - cba$ (ou $cba - abc$) é sempre um número da forma $\alpha 9\beta$ e, além disso, tem-se $\alpha + \beta = 9$; daí que, conhecendo α , sabemos qual é o número.

O valor de $\alpha + \beta$ não nos surpreende: uma vez que um número e a sua versão invertida têm a mesma soma dos respetivos dígitos, eles estão na mesma classe de congruência módulo 9 e, portanto, a diferença entre eles é um múltiplo de 9. A imagem da transformação f , que atua no conjunto N_3 dos números naturais com três dígitos (permitindo-se zeros à esquerda) e que a cada número associa a distância dele para a sua versão invertida, contém apenas dez elementos, nomeadamente

{000, 099, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891}.

Note-se ainda que, como o domínio da função f é finito, se iterarmos f , obtendo para cada x de N_3 a respetiva órbita por f , temos de chegar a um ciclo, cujos elementos estão na imagem da função f . Dos dez números anteriores, 000 é um ponto fixo de f , que atrai todos os números abc com $a = c$; e

099 \rightarrow 891 \rightarrow 693 \rightarrow 297 \rightarrow 495

é um ciclo de período 5 a que chegam todas as outras órbitas em não mais do que duas iterações de f . (ver figura 1 na página seguinte).

Poderíamos ter começado por considerar uma transformação f_1 análoga a f mas a atuar no conjunto N_1 de núme-

ros naturais com dígitos de um dígito: nesse caso, f_1 envia cada número no ponto fixo 0. No conjunto N_2 de números naturais com dois dígitos, além do ponto fixo 00 a aplicação f_2 tem um ciclo de período 5

09 \rightarrow 81 \rightarrow 63 \rightarrow 27 \rightarrow 45

a que chegam todos os números ab com $a \neq b$ em um ou dois iterados de f_2 . Observe-se que este ciclo está relacionado com o ciclo de igual período em N_3 : o de três dígitos obtém-se deste colocando um 9 no meio de cada número. A figura 2 (na página seguinte) ilustra a dinâmica de f_2 .

Que propriedades tem este sistema dinâmico quando consideramos números com quatro ou mais dígitos? Seja N_D o conjunto de naturais com D dígitos de $\{0,1,\dots,9\}$, permitindo-se zeros à esquerda; e seja $i_D : N_D \rightarrow N_D$ a função definida da seguinte forma: a 0 associa 0 e a cada x não nulo de N_D , escrito na base 10 e representado por D dígitos $x = x_{D-1} \dots x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0$, com $m = \text{máximo } \{i : 0 \leq i \leq D-1 \text{ e } x_i \neq 0\}$, associa o natural $i_D(x) = x_0 x_1 \dots x_{m-1} x_m \dots x_{D-1}$ obtido invertendo a ordem dos dígitos de x .

Se f_D designa a função $N_D \rightarrow N_D$ definida por $f_D(x) = |x - i_D(x)|$, todos os números da imagem de f_D são múltiplos de 9 (e, quando D é ímpar, são simultaneamente múltiplos de 9 e de 11).

De facto, essa imagem reduz-se a $(19^{D/2} + 1)/2$ elementos se D é par, e a $(19^{(D-1)/2} + 1)/2$ se D é ímpar. Além disso, como N_D é finito, cada órbita de f_D tem de terminar num ciclo cujos elementos estão na imagem de f_D .

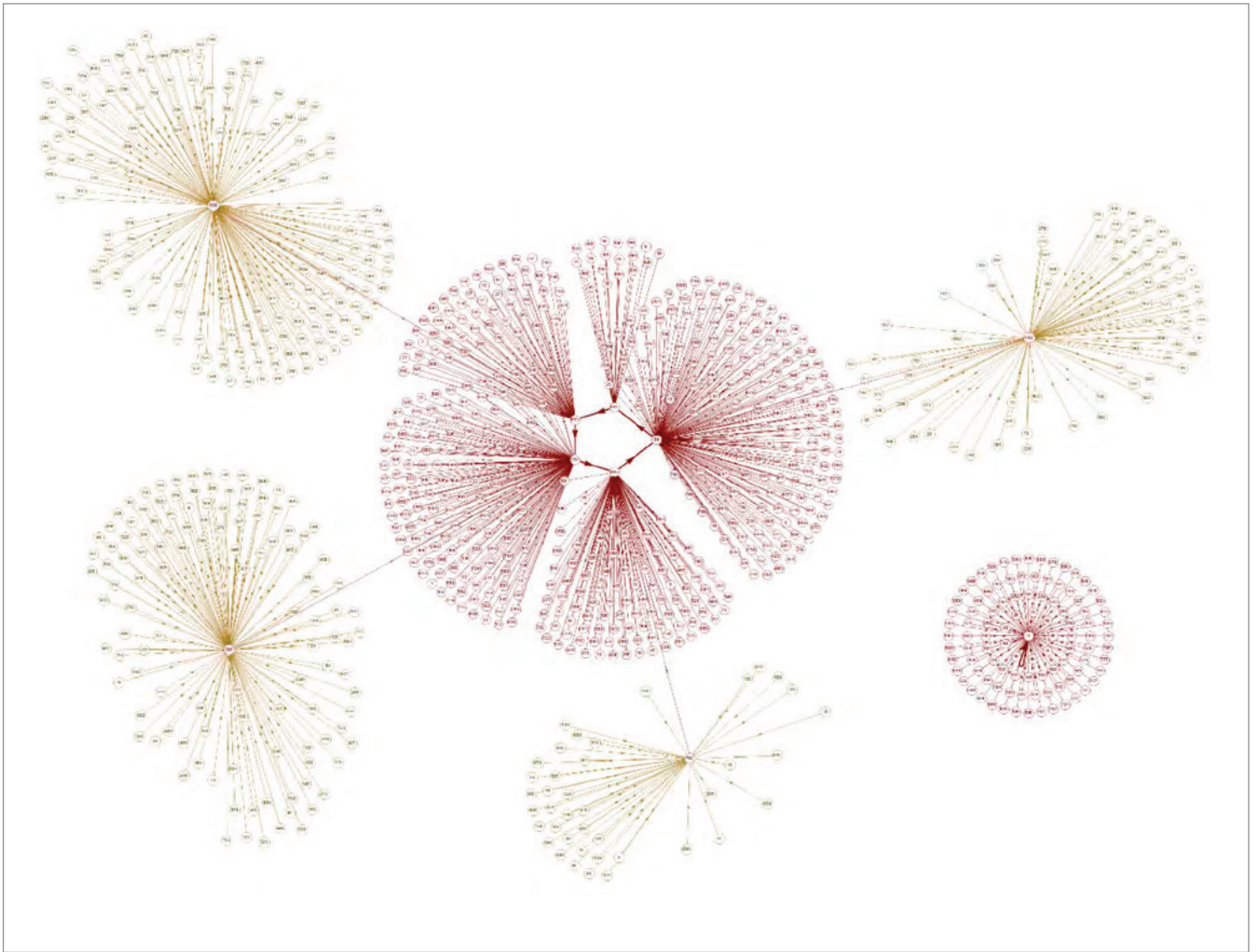


Figura 1. Ciclos e pré-ciclos em N_3 .

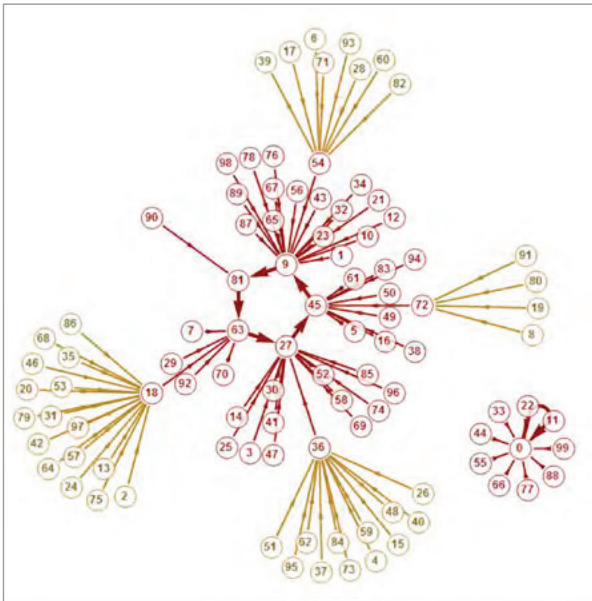


Figura 2. Ciclos e pré-ciclos em N_2 .

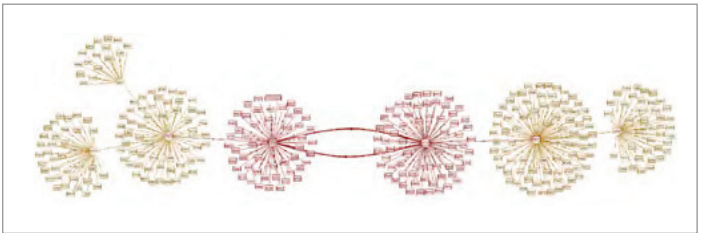


Figura 3. Ciclo de período 2 de N_4 com as suas pré-imagens.

D	N.º de ciclos	Períodos	Pré-período máximo	[Período; Número de ciclos por período]
1	1	1	1	[1; 1]
2	2	1, 5	2	[1; 1], [5; 1]
3	2	1, 5	2	[1; 1], [5; 1]
4	5	1, 2, 5	12	[1; 1], [2; 1], [5; 3]
5	5	1, 2, 5	12	[1; 1], [2; 1], [5; 3]
6	12	1, 2, 5, 9, 18	47	[1; 1], [2; 2], [5; 7] [9; 1], [18; 1]
7	12	1, 2, 5, 9, 18	47	[1; 1], [2; 2], [5; 7] [9; 1], [18; 1]
8	26	1, 2, 5, 9, 10, 14, 18		[1; 1], [2; 4], [5; 15], [9; 2], [10; 1], [14; 1], [18; 2]
9	26	1, 2, 5, 9, 10, 14, 18		[1; 1], [2; 4], [5; 15], [9; 2], [10; 1], [14; 1], [18; 2]
10	49	1, 2, 5, 9, 10, 14, 18		[1; 1], [2; 7], [5; 31] [9; 3], [10; 2], [14; 2], [18; 3]
11	49	1, 2, 5, 9, 10, 14, 18		[1; 1], [2; 7], [5; 31], [9; 3], [10; 2], [14; 2], [18; 3]

Tabela 1

A tabela 1 reúne alguma informação sobre a dinâmica de f_D para $1 \leq D \leq 11$: quantos ciclos tem, os respectivos períodos e, para $1 \leq D \leq 7$, os pré-períodos máximos.

Em [1], encontram-se algumas figuras que ilustram a dinâmica de f_D para estes valores de D ; e pode ler-se uma descrição mais completa de algumas propriedades destas dinâmicas.

Analisemos agora os dados da tabela 2, que contém os ciclos de f_D , para $1 \leq D \leq 6$. Notamos aqui alguns padrões. Para cada natural D , a aplicação f_D só tem um ponto fixo. Se $D > 1$ é ímpar, os ciclos de N_D surgem dos ciclos de N_{D-1} por um dos processos seguintes:

(a) fixamos um elemento de um ciclo de N_{D-1} e colocamos um 9 a meio (vejam-se, por exemplo, os ciclos {2178, 6534} de $D = 4$ e {21978, 65934} de N_5); ou

(b) fixamos um elemento de um ciclo de N_{D-1} e acrescentamos um 0 na posição central (é, por exemplo, essa a relação entre os ciclos {09009, 81081, 63063, 27027, 45045} de $D = 5$ e {0909, 8181, 6363, 2727, 4545} de N_4).

Estes procedimentos não alteram o período do ciclo, mas nem todas as possibilidades produzem ciclos (por exemplo, 09909 não pertence a nenhum ciclo de N_5). Pode ler-se em [1] por que é válida esta propriedade para todo o $D > 1$ ímpar.

Para D par, parece haver maior variedade de meios para se formarem os ciclos de N_D . Por exemplo, podemos fixar um elemento de um ciclo de N_{D-2} e colocar um zero em cada topo (como em {0090, 0810, 0630, 0270, 0450} quando $D = 4$); ou escolher um elemento de um ciclo de $N_{D/2}$ e repeti-lo duas vezes (veja-se o ciclo {0909, 8181, 6363, 2727, 4545}, quando $D = 4$); ou selecionar ciclos de valores de D menores e juntá-los depois de uma permutação conveniente (como no ciclo {978021, 857142, 615384, 131868, 736263, 373626, 252747, 494505, 010989} de $D = 6 = 2 + 4$, cujo primeiro elemento resulta de uma tal união entre os ciclos {09, 81, 63, 27, 45} de N_2 e {2178, 6534} de N_4).

A lista de procedimentos detetados para $1 \leq D \leq 12$ é extensa (veja-se [1]) e alguns deles geram ciclos com períodos novos relativamente aos já obtidos para valores menores de D . O programa elaborado pelo Atractor para calcular os ciclos de f_D demorou centésimas de segundo para fornecer a lista completa dessas órbitas especiais quando $2 \leq D \leq 4$; gastou poucos segundos para $D = 6$ e cerca de dois minutos para $D = 8$. Quando se fixou $D = 12$, porém, o tempo previsto subiu para cerca de um ano (embora, usando amostras ao acaso de elementos da imagem de f_{12} , a busca de ciclos tenha sido mais rápida). Fica, por isso, o desafio de se provarem, para $D \geq 12$ e sem recurso ao computador, algumas das propriedades detetadas nas dinâmicas anteriores.

D	Per ^o	Ciclos em N_D	D	Per ^o	Ciclos em N_D			
1	1	{0}	6	1	{000000}			
2	1	{00}		2	2	{219978, 659934}		
	5	{09, 81, 63, 27, 45}				{021780, 065340}		
3	1	{000}		5	5	{099999, 899991, 699993, 299997, 499995}		
	5	{099, 891, 693, 297, 495}				{090009, 810081, 630063, 270027, 450045}		
4	1	{0000}				{009990, 089910, 069930, 029970, 049950}		
	2	{2178, 6534}				{000900, 008100, 006300, 002700, 004500}		
	5	5				{0999, 8991, 6993, 2997, 4995}	{009090, 081810, 063630, 027270, 045450}	
						{0090, 0810, 0630, 0270, 0450}	{090909, 818181, 636363, 272727, 454545}	
{0909, 8181, 6363, 2727, 4545}	{099099, 891891, 693693, 297297, 495495}							
5	1	{00000}				9	9	{978021, 857142, 615384, 131868, 736263, 373626, 252747, 494505, 010989}
	2	{21978, 65934}						{043659, 912681, 726462, 461835, 076329, 847341, 703593, 308286, 374517, 340956, 318087, 462726, 164538, 670923, 341847, 406296, 286308, 517374}
	5	5				{09999, 89991, 69993, 29997, 49995}	18	18
				{09009, 81081, 63063, 27027, 45045}				
{00990, 08910, 06930, 02970, 04950}								

Tabela 2

A transformação f_D pode ser considerada como atuando nos naturais quando representados numa outra base que não 10 (designemo-la por $f_{D,base}$), esperando-se dinâmicas distintas, uma vez que o comportamento das órbitas de $f_{D,base}$ depende dos dígitos permitidos na representação dos naturais. Por exemplo, na base 2 e para $D = 4$, a imagem de uma tal transformação $f_{4,2}$ contém cinco números e há quatro ciclos fixos, nomeadamente {0000}, {0010}, {0101}, {0111}; e são apenas estes os atratores de $f_{4,2}$. Mais geralmente, nesta base e para todos os valores de D par, há $2^{D/2}$ pontos fixos (e conjectura-se que são apenas esses os atratores de $f_{D,2}$). Em base 3 e para $D = 6$, encontramos três pontos fixos ({000000},{010120},{102212})

e uma órbita de período 2 ({010212, 201021}), e só estes ciclos. Em [1] prova-se que, para algum D , $f_{D,B}$ tem pontos fixos não nulos se e só se B for não congruente com 1 módulo 3. Um ponto fixo de $f_{2,B}$ é $((B-2)/3, (2B-1)/3)_B$ se B é congruente com 2 módulo 3; um ponto fixo de $f_{4,B}$ é $(B/3, B/3-1, 2B/3-1, 2B/3)_B$, se B for múltiplo de 3.

Em [1] encontram-se mais dados sobre estas e outras bases, alguns dos quais obtidos através de applets interativos que o leitor é convidado a explorar.

REFERÊNCIAS

[1] www.atractor.pt/mat/ABC-CBA

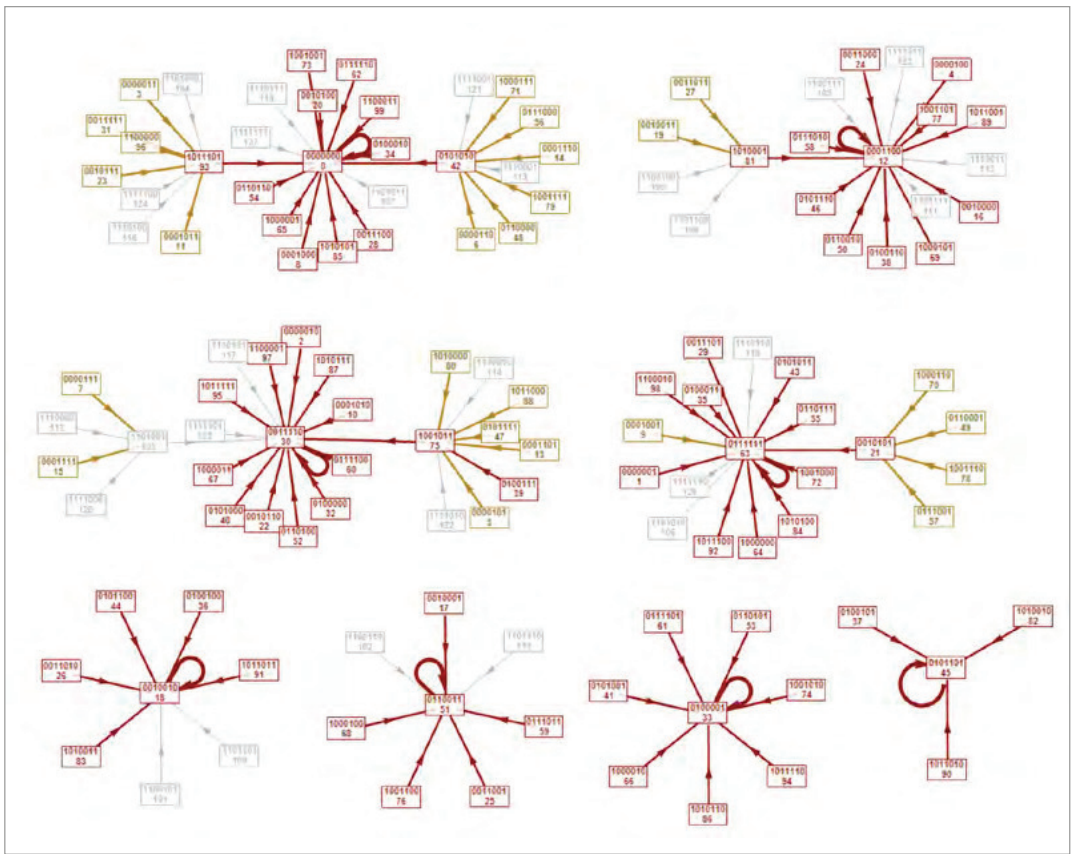


Figura 4. Ciclos e pré-ciclos em $f_{7,2}$.

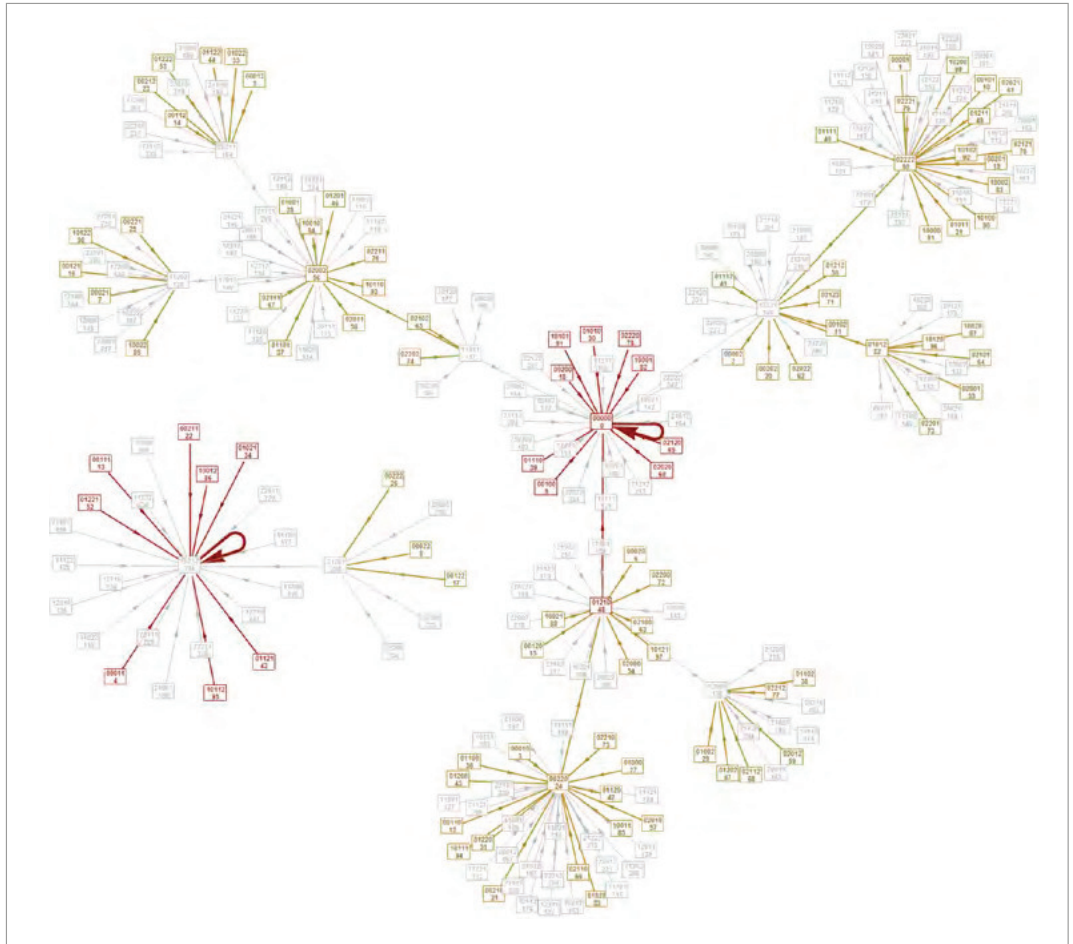


Figura 5. Ciclos e pré-ciclos em $f_{5,3}$.