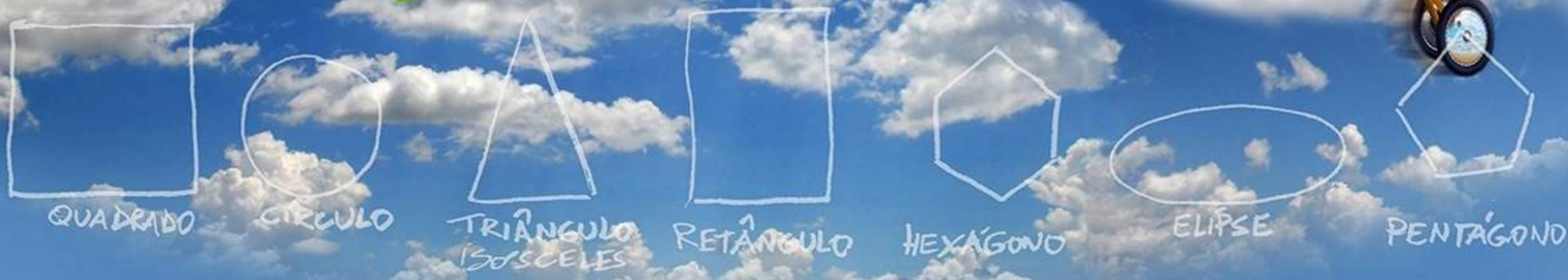
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Jornal das Primeiras MATEMÁTICAS



Número 5
Dezembro 2015

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR

Ludus

Propriedade e Edição
Associação para a Educação Matemática Elementar, Escola EB1 da Arcela
Rua Nossa Sra. de Fátima, Azurém, 4800-007 Guimarães, Portugal
Associação Ludus, Museu de Ciência, Rua da Escola Politécnica 56
1250-102 Lisboa, Portugal
Email: jpm@ludus-opuscula.org URL: http://jpm.ludus-opuscula.org

Informações
O *Jornal das Primeiras Matemáticas* é semestral, eletrónico e incide sobre a matemática do pré-escolar e dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico. Apesar disso, a comissão editorial poderá aceitar artigos focados noutros níveis de ensino desde que o conteúdo se mostre suficientemente relevante para permitir o devido aproveitamento para os níveis que constituem o objeto do jornal. O público alvo é constituído preferencialmente por educadores e por professores dos 1.º e 2.º ciclos, mas poderá estender-se a pais, encarregados de educação e crianças. Os números saem nos exatos momentos de Solstício. As secções serão as seguintes (em cada número poderá haver mais de um artigo por secção ou secções que não sejam contempladas):
Entrevistas
Jogos
Matemática no Quotidiano
Necessidades Educativas Especiais
Notícias
Os Primeiros Livros
Problemas e Desafios
Recursos Didáticos
Vária
Os autores são matemáticos, professores, educadores, formadores e investigadores, próximos da realidade do pré-escolar e dos 1.º e 2.º ciclos. Isto é uma norma geral não obrigatória. Os textos são da inteira responsabilidade dos autores, não refletindo qualquer posição editorial do jornal.

Conteúdo

O programa AtrMini

Associação Atractor
`http://www.atractor.pt`
atractor@atractor.pt

Resumo: *Neste trabalho é feita uma apresentação do* AtrMini*, uma coleção de jogos virtuais para crianças, criada pela Associação Atractor para a abordagem de alguns conceitos matemáticos. Os jogos são disponibilizados gratuitamente e foram concebidos para funcionarem nos sistemas operativos Windows e Macintosh.*

Palavras-chave: Matemática elementar, jogos virtuais, *Atractor*.

1 Introdução

O *AtrMini* [1] consiste numa coleção de jogos virtuais dirigidos às crianças, podendo ser importado gratuitamente de `http://www.atractor.pt/mat/AtrMini`. Criado pela Associação Atractor, está disponível para dois sistemas operativos, Windows e Mac [1, 2].

Trata-se de uma ferramenta útil no ensino da Matemática a nível elementar, permitindo, através de uma utilização lúdica, o treino de diversas competências: cálculo mental, utilização do dinheiro, raciocínio combinatório, escrita de números em forma de fração, percentagem ou decimal, etc. Neste artigo, é feita uma descrição detalhada e ilustrada de vários jogos.

[1] Lê-se "A-Tê-Érre" Mini.

Figura 1: Página de entrada do *AtrMini*.

Ao entrar no programa, o utilizador depara-se com uma panóplia de jogos (Figura 2).

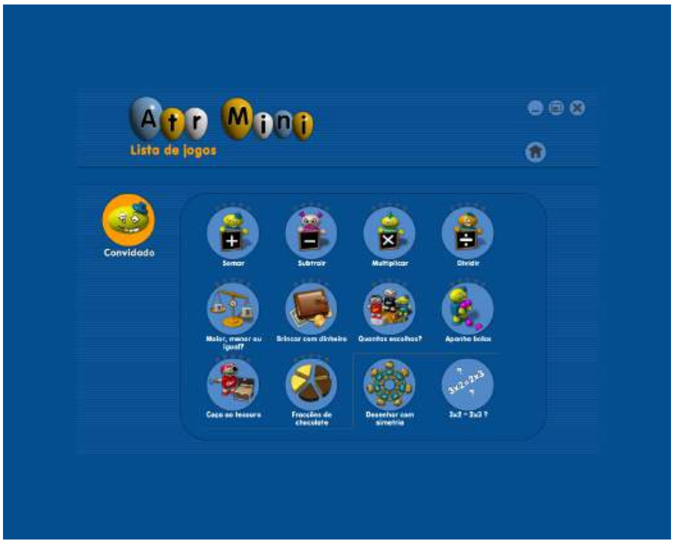


Figura 2: Menu Principal.

Com estes jogos, as crianças podem, não só treinar o cálculo mental através das aplicações "Somar", "Subtrair", "Multiplicar" e "Dividir", mas também comparar números, em "Maior, menor ou igual?", ou analisar propriedades aritméticas como a comutatividade da multiplicação (em $3 \times 2 = 2 \times 3$?). Para além dos jogos referidos, há outros que destacamos nas secções que se seguem.

2 Brincar com o dinheiro

Tarefas quotidianas como pagar um objeto e calcular o respetivo troco podem ser aperfeiçoadas através do jogo “Brincar com dinheiro”.

Figura 3: Brincar com o dinheiro.

Neste jogo, o utilizador deve efetuar o pagamento de um objeto, podendo fazê-lo de duas formas: (1) facultando o valor exato – arrastando as notas ou moedas para a região laranja como se mostra na Figura 4;

Figura 4: Sem troco.

(2) facultando um valor superior ao pedido, clicando na caixa registadora e arrastando o valor do troco da caixa registadora para a região laranja como se mostra na Figura 5.

Figura 5: Com troco.

Num primeiro nível, os preços são sempre certos (sem cêntimos). Ao finalizar corretamente cinco pagamentos, o utilizador é encaminhado para o nível seguinte. O jogo compreende um total de 7 níveis, tendo os dois últimos o tempo limitado. Naturalmente, o grau de dificuldade aumenta com o nível: por exemplo, a partir do nível 2 é exigida a utilização de moedas de cêntimos e a partir do nível 4 o utilizador é obrigado a usar troco.

3 Quantas escolhas?

Em "Quantas escolhas?", as crianças têm um primeiro contacto com questões simples de combinatória, mais concretamente, com a pesquisa de todas as combinações ou arranjos possíveis entre objetos.

Figura 6: Quantas escolhas?

No nível 1, o utilizador deve fotografar todos os “emparelhamentos” possíveis com 3 bonecos, 2 a 2 (Figura 7). A tarefa consiste em arrastar pares de bonecos para o pódio e carregar no símbolo da câmara fotográfica sempre que obtém um novo “emparelhamento”.

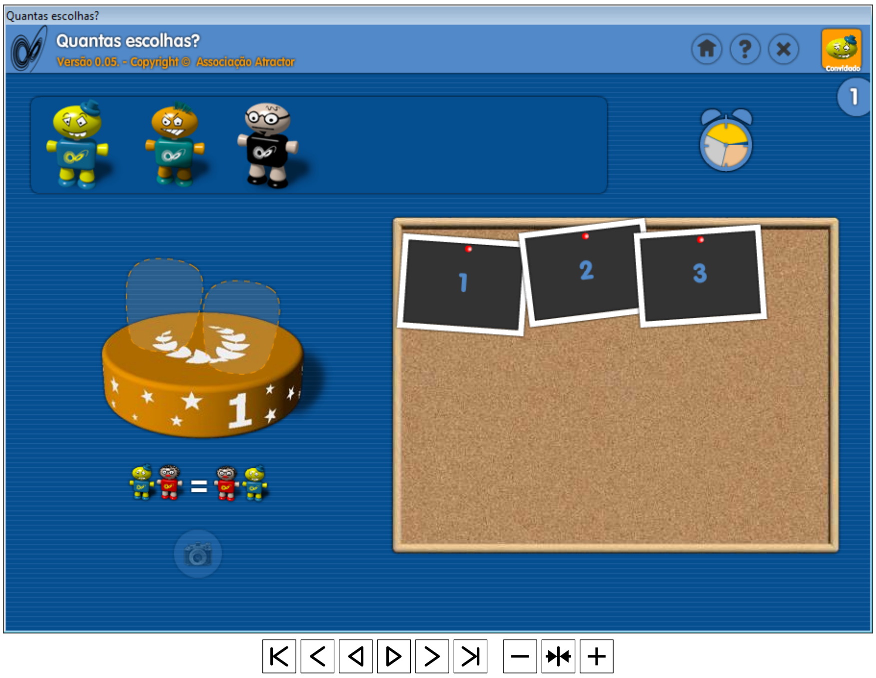


Figura 7: Emparelhando.

Na situação representada na Figura 7, aparece uma imagem que indica que não se atende à ordem, mas simplesmente aos bonecos que lá estão (parte esquerda da Figura 8). Este é um dos dois cenários possíveis no jogo. No outro (parte direita da Figura 8), atende-se também à ordem. Este segundo cenário não aparece antes do nível 3.

Figura 8: A ordem interessa ou não?

As Figuras 9 e 10 ilustram os níveis 3 e 4.

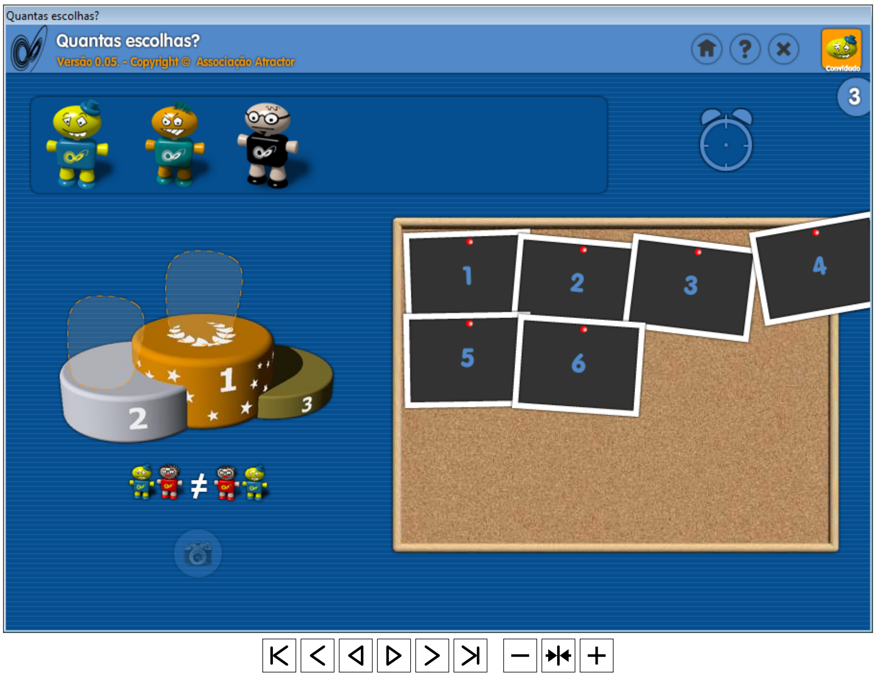


Figura 9: Nível 3.

Figura 10: Nível 4.

4 Apanha bolas

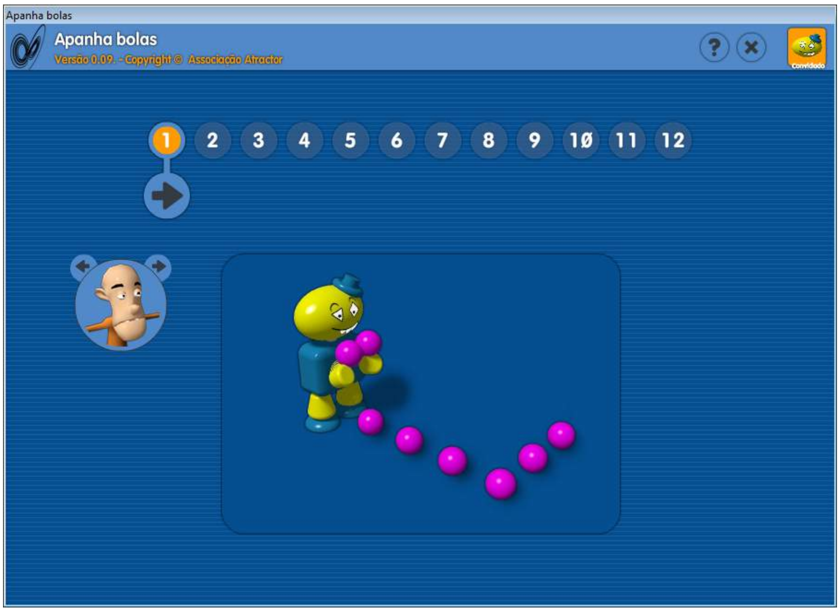


Figura 11: Apanha bolas.

Uma versão elementar da linguagem *Logo* encontra-se disponível no AtrMini, sendo o utilizador convidado a recolher um número pré-definido de bolas, usando algumas instruções simples do *Logo*. Trata-se de um jogo com utilidade na introdução de conceitos de programação ao nível do primeiro ciclo.

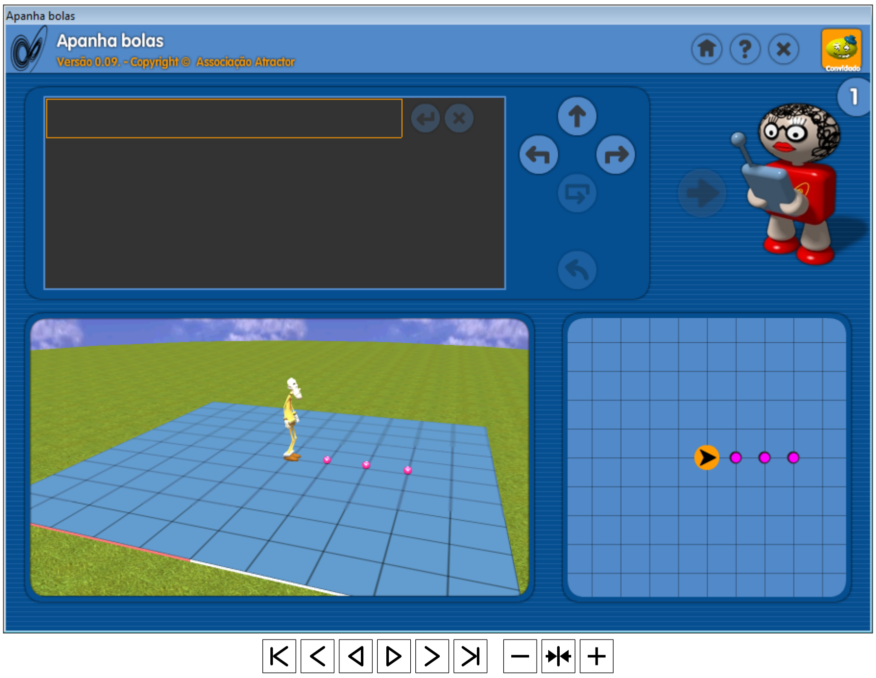


Figura 12: Nível 1.

Neste jogo, um "boneco" deve apanhar um conjunto de bolas, recorrendo apenas a um certo número de instruções. A Figura 13 mostra as possibilidades existentes. A vermelho, estão os três movimentos possíveis. Por exemplo, três passos para a frente resolvem o nível exposto na Figura 12. A amarelo, estão procedimentos "logísticos", como apagar uma linha ou voltar atrás. A verde, estão ações importantes, utilizadas na forma de combinar os outros comandos. O nível da Figura 12 poderia ter sido resolvido indicando o número de vezes que deve ter lugar a ação "movimento para a frente", como se ilustra na Figura 14. A mudança de linha é importante para separar ações.

A partir do nível 5, impõe-se restrições sobre o número de vezes que se pode usar o movimento para a frente, não sendo possível resolver os problemas sem usar repetições.

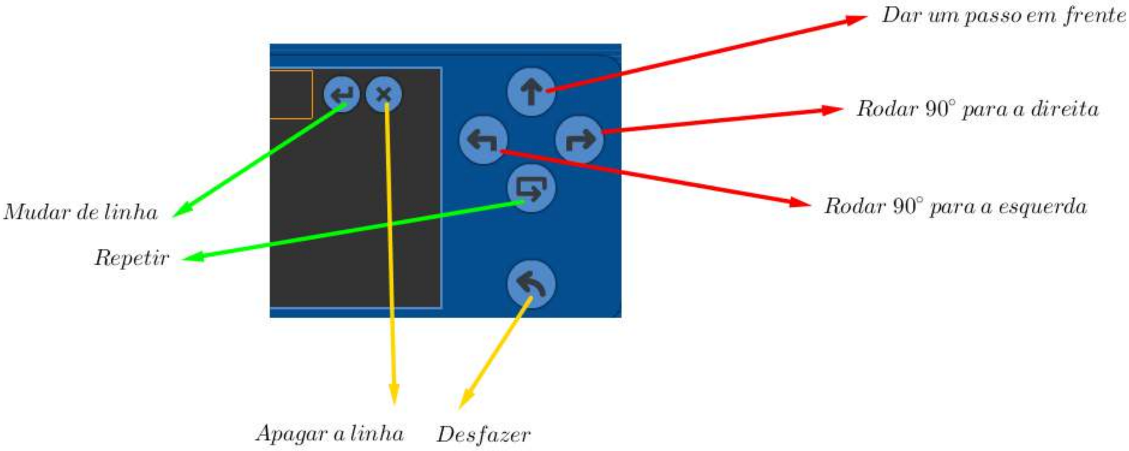


Figura 13: Instruções.

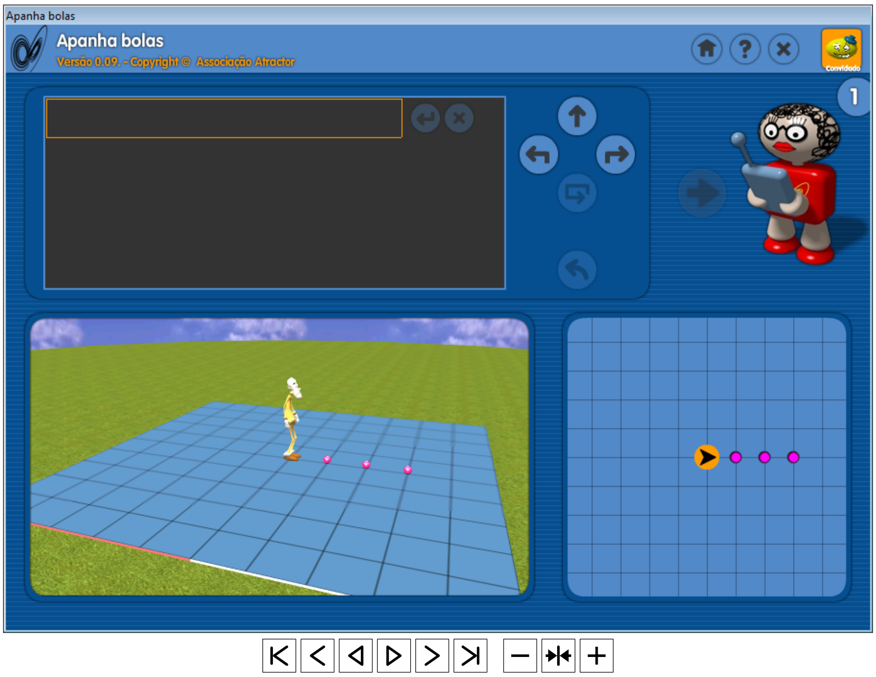


Figura 14: Nível 1, com repetições.

Na Figura 15 mostra-se uma situação patente no nível 8, na qual se pretende apanhar 3 bolas, dispostas nos vértices de um quadrado de lado 1. Para tal, basta repetir 3 vezes o par de instruções “dar um passo em frente” + “virar à esquerda”.

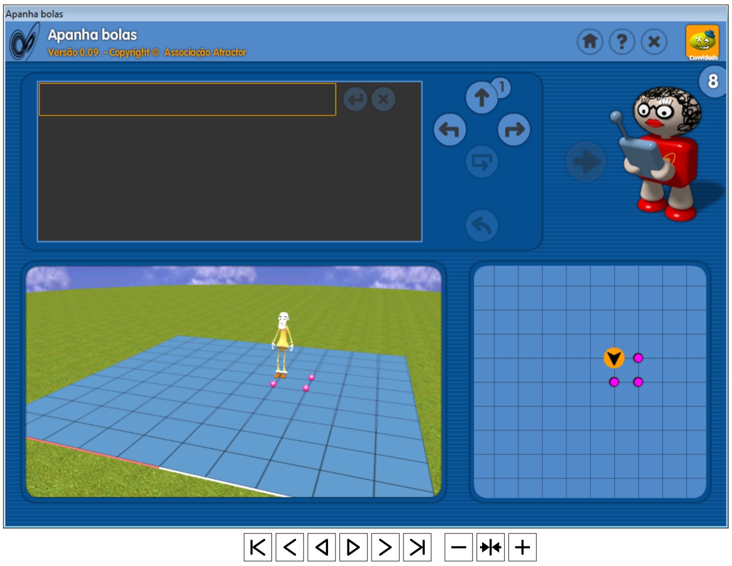


Figura 15: Nível 8.

Nas Figuras 16 e 17, mostram-se dois casos um pouco mais complexos.

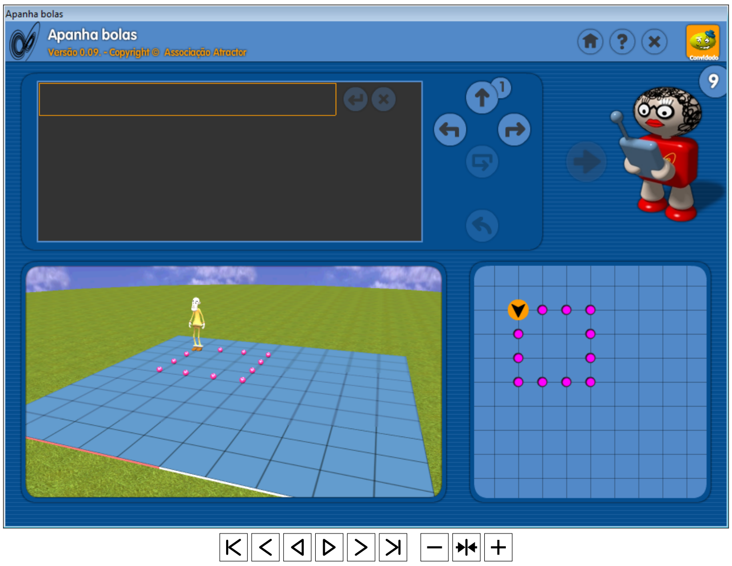


Figura 16: Nível 9; repetições elaboradas.

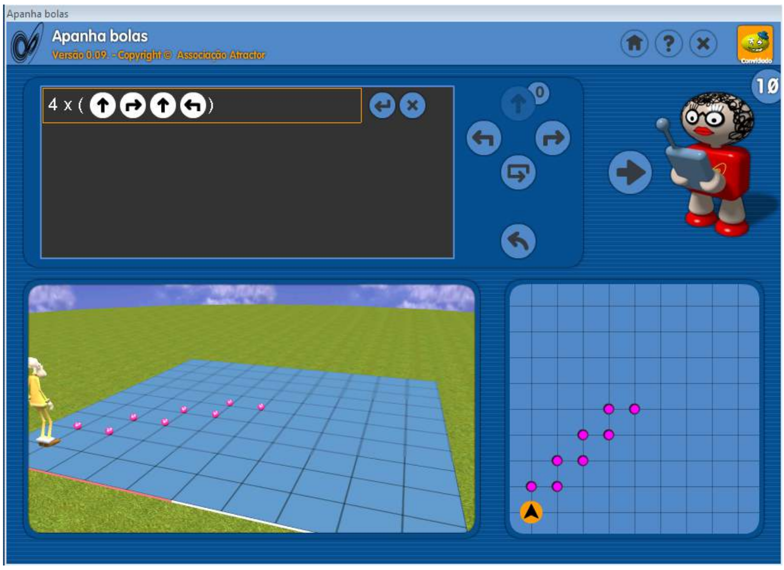


Figura 17: Nível 10; repetições elaboradas.

5 Caça ao tesouro

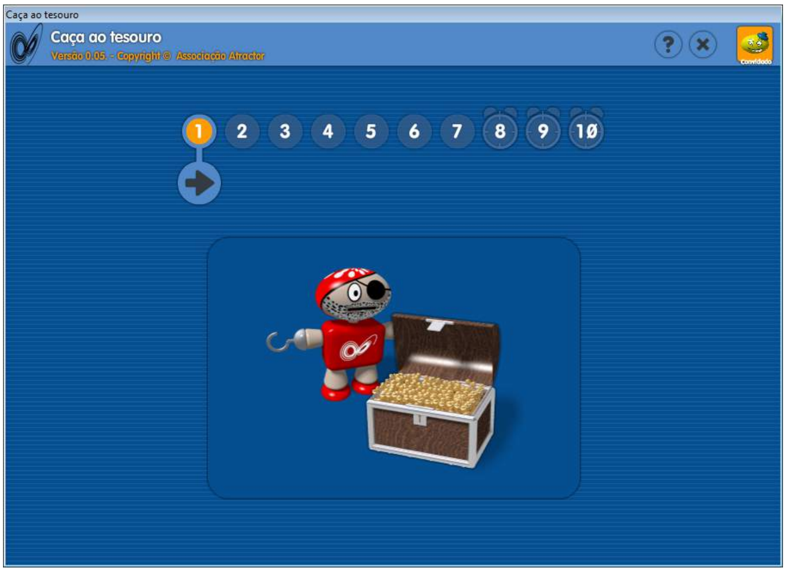


Figura 18: Caça ao tesouro.

Neste jogo, o utilizador é confrontado com uma caça ao tesouro que obriga a algum raciocínio.

Figura 19: Distância entre a partida e o pirata.

Inicialmente, o utilizador é convidado a conduzir um pirata até ao tesouro. Em simultâneo, é exibida a distância entre o ponto de partida e a posição do pirata, distância essa calculada em função do número de quadrados percorridos pelo pirata (Figura 19). O programa não deixa avançar por um caminho mais comprido do que o necessário (Figura 20).

Figura 20: Obrigatoriedade do caminho mais curto.

No segundo nível, pretende-se determinar a distância do pirata ao tesouro (Figura 21).

Figura 21: Qual é a distância ao tesouro?

No terceiro nível, são fixados um quadrado e uma distância n, sendo o utilizador convidado a indicar as estrelas que se encontram à distância n do quadrado (Figura 22).

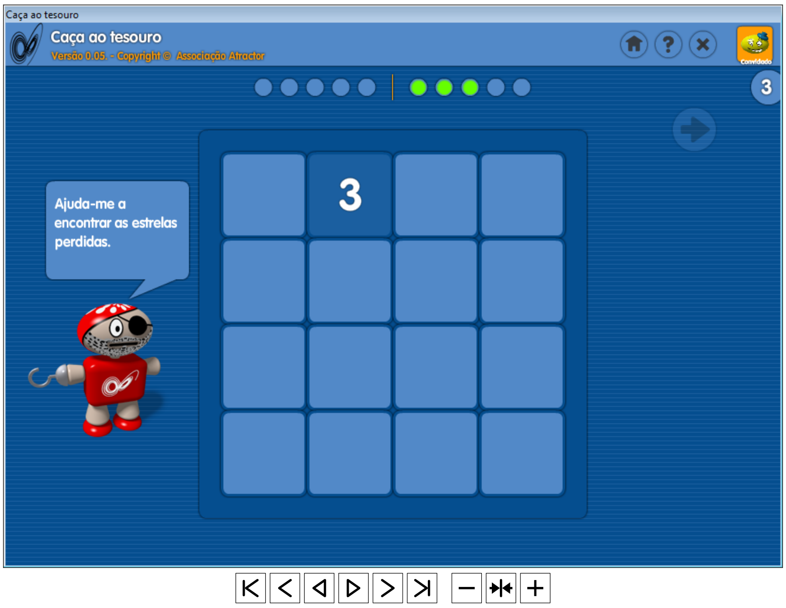


Figura 22: Onde estão as estrelas?

Os restantes níveis são dedicados à caça ao tesouro propriamente dita. A título de exemplo, no caso ilustrado na Figura 23, procura-se o único quadrado que se encontra simultaneamente à distância 3, 3 e 4, respetivamente, dos quadrados com números a rosa, azul e amarelo.

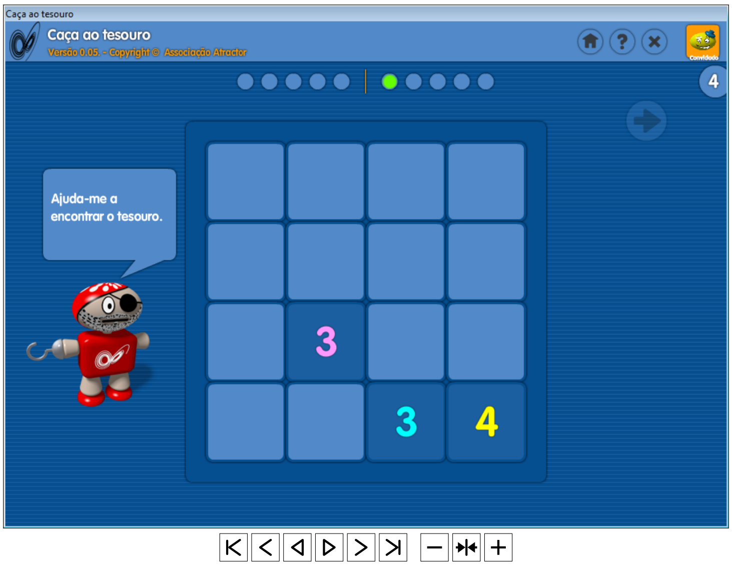


Figura 23: Onde está o tesouro?

6 Frações de chocolate

Figura 24: Frações de chocolate.

O *Atractor* concebeu o jogo “Frações de chocolate”para introduzir, de forma lúdica, a escrita de números nas formas de fração, percentagem e decimal.

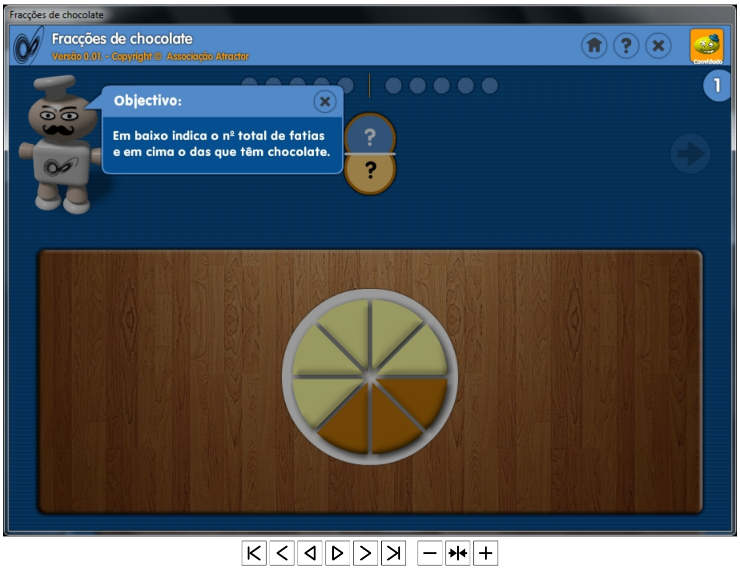


Figura 25: Significado de uma fração: exemplo com fatias de chocolate.

No primeiro nível, o objetivo é escrever, não necessariamente de forma simplificada, a fração correspondente à parte de chocolate de um bolo cortado às fatias (Figura 25). A partir do segundo nível e até ao quinto, é abordada a noção de equivalência de frações (Figura 26).

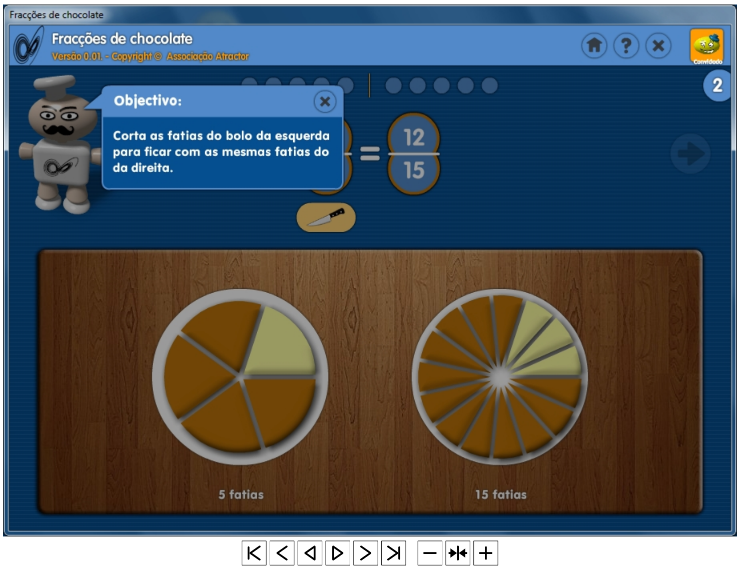


Figura 26: Frações equivalentes.

A escrita dos números em três formas – fração, decimal e percentagem – inicia-se no sexto nível (Figura 27).

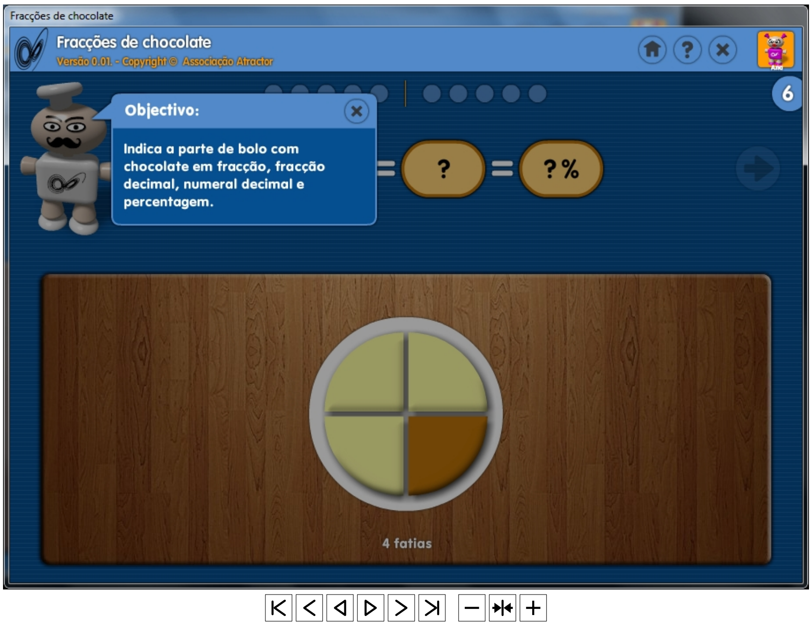


Figura 27: Escrita de números nas formas de fração, decimal e percentagem.

Os níveis finais têm como objetivo testar os conhecimentos adquiridos (Figuras 28 e 29).

Figura 28: Testando conhecimentos.

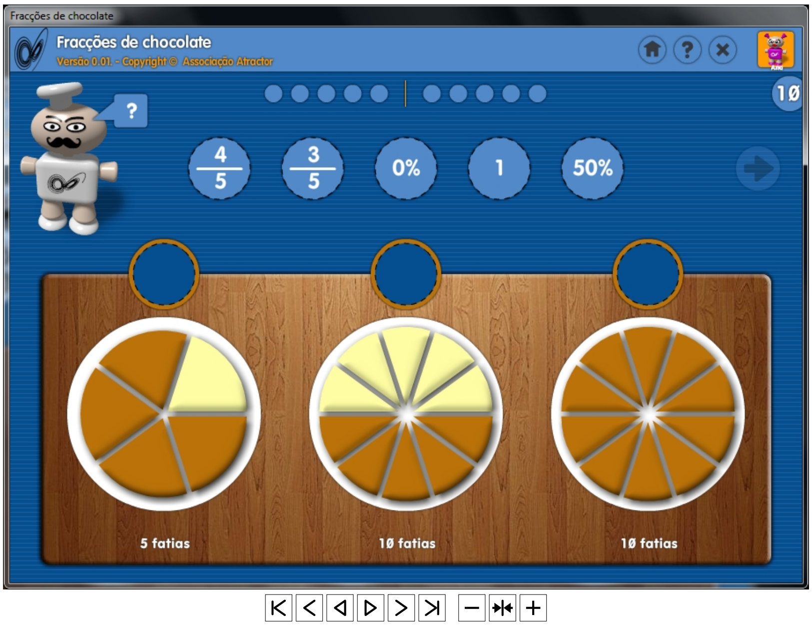


Figura 29: Testando conhecimentos.

7 Desenhar com simetria

Figura 30: Desenhar com simetrias.

O temática da simetria não é esquecida, tendo o utilizador à sua disposição um "caleidoscópio" com a particularidade de não operar apenas com reflexões, mas também com rotações, translações e reflexões deslizantes. Com efeito, clicando no símbolo da esquerda da Figura 31 (símbolo que representa a última isometria usada), o utilizador pode escolher a isometria pretendida. Por outro lado, à direita desse símbolo, o utilizador pode mudar o número de imagens visíveis na figura final.

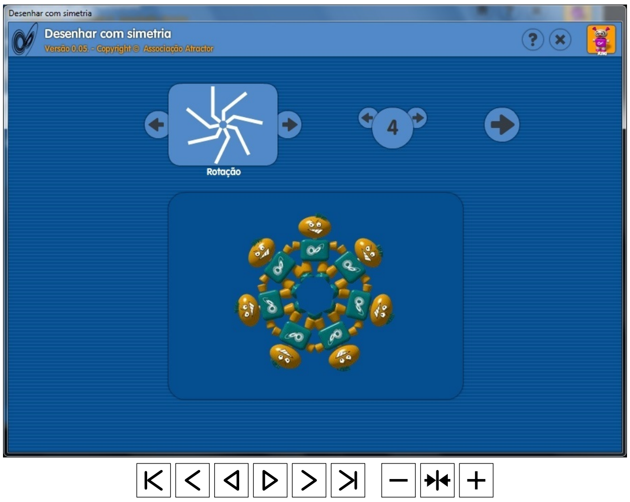


Figura 31: Escolhendo a isometria.

Por exemplo, a partir da escolha feita na Figura 31, mudando a cor do fundo e arrastando imagens pré-definidas da barra lateral direita para a região escurecida no centro, fazem-se desenhos como o que é exposto na Figura 32.

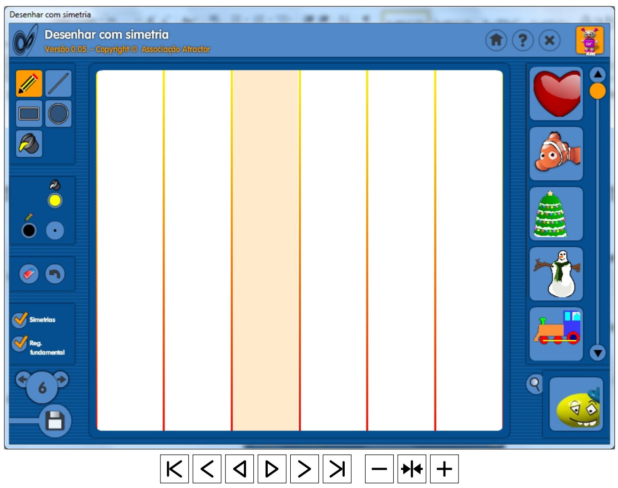


Figura 32: Exemplo de desenho.

Também se podem gerar outras imagens utilizando figuras importadas, recorrendo à lupa no canto inferior direito (Figura 33). Observa-se que, clicando no símbolo com a *diskette*, o utilizador pode gravar os seus desenhos.

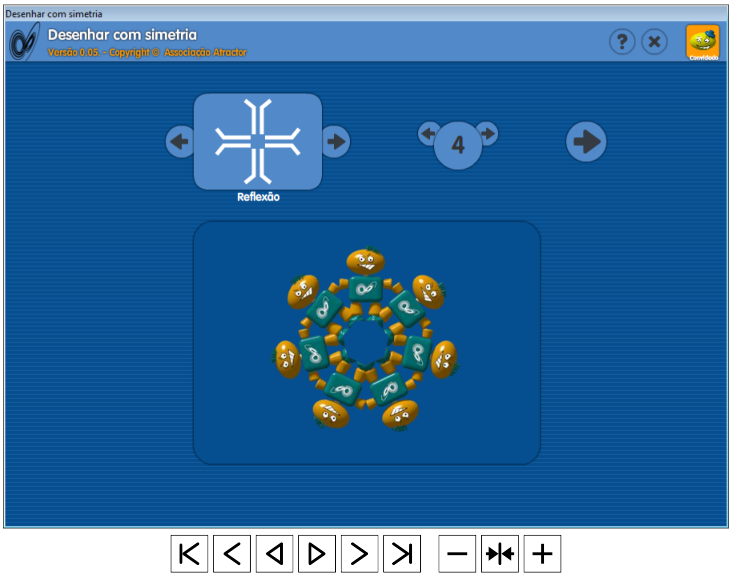


Figura 33: Desenhos com figuras do utilizador.

8 Notas finais

O *AtrMini* é um programa em versão beta. Se detetar *bugs*, ou tiver relatos de experiências com alunos usando este programa, por favor contacte o *Atractor* (endereço no início do artigo). Se julga ter sugestões interessantes para criação de novos jogos ou conteúdos para o *AtrMini*, por favor informe o *Atractor*. Está previsto lançamento para breve de uma versão do *AtrMini* para tablets. Se estiver interessado em ser informado deste lançamento ou de outras novidades do *Atractor*, subscreva a *Newsletter* [3].

Referências

[1] Associação *Atractor*, criada em 30 de Abril de 1999, vocacionada para a divulgação da matemática. http://www.atractor.pt

[2] Software realizado no *Atractor*, no âmbito de bolsa atribuída pela FCT. Versão à data deste artigo: beta 0.3.9 – 2015/12/03. http://www.atractor.pt/mat/AtrMini

[3] *Newsletter*. http://www.atractor.pt/mailman/listinfo/info

Matemática na Educação Pré-Escolar: A Ordem das Dezenas

Carlos Pereira dos Santos, Ricardo Cunha Teixeira
Centro de Análise Funcional, Estruturas Lineares e Aplicações da Universidade de Lisboa
Núcleo Interdisciplinar da Criança e do Adolescente da Universidade dos Açores
cmfsantos@fc.ul.pt, ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Resumo: *O nosso sistema numérico é um sistema posicional e de base dez. É posicional porque o valor dos símbolos depende da posição que ocupam. É de base dez por serem necessárias dez unidades de ordem inferior para compor uma de ordem imediatamente superior. Embora consideremos este sistema simples e natural quando o utilizamos no dia a dia, não nos devemos esquecer de como é sofisticado e engenhoso. A humanidade demorou muito a ter um sistema numérico como o que utilizamos presentemente. Houve mesmo épocas em que civilizações avançadas utilizavam diferentes sistemas em simultâneo. Alguns consideravelmente piores do que o atual. Por isso, não podemos almejar que uma criança em idade pré-escolar possa compreender totalmente o sistema decimal. De facto, a temática das ordens numéricas e, em particular, a da ordem das dezenas, é consideravelmente delicada. Neste artigo, exploraremos algumas formas de abordar o conceito de ordem das dezenas junto de crianças a partir dos cinco anos de idade. As ideias apresentadas são inspiradas no* Singapore Math, *método utilizado para o ensino da matemática inicial em Singapura, um exemplo bem-sucedido da abordagem "concreto-pictórico-abstrato"*[1].

Palavras-chave: abordagem "concreto-pictórico-abstrato", educação pré-escolar, ordem das dezenas, ordens numéricas, sistema decimal.

1 Introdução

Há 17 300 anos, a famosa gruta de Lascaux em França (Figura 1) era um local que concentrava o melhor que a humanidade fazia, tanto a nível artístico como científico. Para melhor perceber a ideia, imagine o leitor que tinha na parede da

[1] Este trabalho é uma versão revista e ampliada dos artigos [15, 16].

sua casa lindas pinturas de Picasso lado a lado com as mais avançadas fórmulas matemáticas. A beleza do veado fala por si, mas o que são os treze pequenos círculos seguidos de um quadrado vazio? A resposta é comum em vários objetos arqueológicos: catorze é sensivelmente metade de um ciclo lunar e o quadrado vazio simboliza provavelmente a Lua Nova [1]. Este tipo de informação era ciência de ponta há mais de quinze mil anos.

Figura 1: Gruta de Lascaux.

Apresentamos este exemplo para introduzir o tema que propomos abordar: a *ordem das dezenas*[2]. Repare o leitor como somos mais sofisticados hoje em dia; em vez de desenharmos 13 pequenos círculos escrevemos um "1" e um "3", em que "1" representa uma dezena em vez de uma unidade. Esta sofisticada notação numérica não apareceu de um dia para o outro, pelo contrário, sofreu um longo período de gestação. O importante conceito moderno de ordem numérica[3] é muito subtil, tendo enorme influência na forma como fazemos os nossos cálculos matemáticos.

A representação exposta em Lascaux ainda não apresenta duas ideias fundamentais do nosso sistema de numeração moderno: o *agrupamento* (que origina o conceito de *base de numeração*) e a *posição*. Os antigos egípcios já apresentavam agrupamentos no seu sistema numérico. Tal como na gruta, o número 1 era representado de forma simples por

$$|$$

e o número 4 por

$$||||$$

[2]Em bom rigor, podia dizer-se "ordens numéricas", na medida em que o mecanismo associado à compreensão da ordem das dezenas é idêntico ao associado à ordem das centenas, dos milhares, ...

[3]*Place Value*, em inglês.

No entanto, um agrupamento de dez unidades já era representado por ∩, um de dez dezenas por 𓍢, um de dez centenas por 𓆼 e assim sucessivamente. Os egípcios agrupavam dez unidades de ordem inferior numa de ordem superior. Fazendo isso, criaram a ideia de *base 10* para a conceção de vários tipos de unidade de magnitude diferente. No entanto, o sistema egípcio diferia do nosso por um motivo muitíssimo relevante; a *posição* dos símbolos não era assim tão importante. Sendo 𓍢 cem e ∩∩ vinte, não havia nenhuma diferença substancial em representar cento e vinte por 𓍢∩∩ ou por ∩∩𓍢.

O sistema romano era ligeiramente mais sofisticado. Neste sistema, temos os símbolos I - 1; V - 5, X - 10, L - 50, C - 100, D - 500 e M - 1000. Na versão mais conhecida[4], os símbolos V, L e D não podiam aparecer mais de uma vez e os símbolos I, X, C e M podiam aparecer no máximo três vezes seguidas. Valia também o princípio subtrativo que estipulava que um símbolo de ordem inferior à esquerda de um de ordem superior devia ser subtraído (por exemplo, IX= 9)[5]. Além disso, a escrita dos números funcionava por ordens numéricas tal como o nosso. Quer esta última regra dizer que um número como 999 não se escrevia IM, mas sim, CM XC IX, exibindo sequencialmente as ordens das unidades, dezenas, centenas, etc. No sistema romano, um símbolo tinha sempre o mesmo valor, que *não dependia da sua posição.* Embora exibindo a base dez, o sistema ainda não era posicional, o que originava a necessidade de constante renovação de símbolos. Não era possível representar, por exemplo, 100 210 566 753 em numeração romana sem recurso a novos símbolos ou convenções.

O sistema babilónico trouxe a enorme inovação posicional. De uma forma semelhante ao que se vê na gruta, o número um era representado por

e o número 4 por

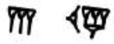
Estes traços eram óptimos para serem feitos de forma expedita com uma cunha sobre argila. Tal como no caso dos egípcios, a ideia de agrupamento estava presente. O dez tinha um símbolo próprio:

No entanto, com os babilónios, surgiu uma espantosa novidade. Os símbolos já valiam conforme a posição ocupada, não tendo um valor estático. Repare-se no nosso sistema: quando escrevemos 1234, o símbolo "1" vale mil, mas quando escrevemos 213, o símbolo "1" vale dez. O seu valor *depende* da posição. A primeira ordem é a das unidades, sendo 10 unidades uma dezena; a segunda ordem é a das dezenas, sendo 10 dezenas uma centena; a terceira ordem é a das centenas, etc. Os babilónios tiverem uma ideia muito semelhante com um factor multiplicativo diferente, em vez de 10, utilizavam o 60 para o salto

[4] Houve mais do que uma versão do sistema de numeração romano.

[5] Ao aparecer o conceito de lateralidade esquerda-direita, esta regra consistia já uma primeira ideia posicional.

de magnitude: A primeira ordem era a das unidades, sendo 60 unidades "um sessenta"; a segunda ordem era a dos sessentas, sendo 60 sessentas "um três mil e seiscentos"; a terceira ordem era a dos três mil e seiscentos, etc. Por exemplo, o número "3 sessentas e 14 unidades" ($194 = 3 \times 60 + 14$, no nosso sistema de numeração) era representado da seguinte forma:



O leitor atento pode fazer uma pergunta fundamental: como diferenciavam os babilónios, por exemplo, 3 unidades de 3 sessentas? Basicamente, pelo contexto. Isto porque os babilónios ainda não utilizavam o zero. No nosso sistema, distinguimos 3 unidades de 3 dezenas com uma engenhosa utilização do zero. Por exemplo, quando escrevemos 30, o símbolo "0", mais do que representar zero unidades, *indica que o símbolo* "3" *ocupa a casa das dezenas.* O sistema babilónico era quase tão bom como o nosso, diferenciando-se apenas nesse importante pormenor. O zero acabou por ser introduzido numa fase posterior da história do sistema de numeração babilónico, sendo representado por duas cunhas inclinadas:

Um caso verdadeiramente notável de um sistema de numeração antigo tão eficaz e engenhoso como o nosso é o sistema maia. O número um era representado por

•

e o número 4 por

••••

Estes símbolos eram gravados na pedra. Tal como no caso dos egípcios e dos babilónios, a ideia de agrupamento estava presente. O cinco tinha um símbolo próprio:

▬

Os maias, de forma totalmente independente, tiverem a mesma ideia dos babilónios ao criar um sistema de natureza posicional, mas com um factor multiplicativo diferente. Em vez de 10 ou 60, utilizavam o 20 para o salto de magnitude: a primeira ordem era a das unidades, sendo 20 unidades "uma vintena"; a segunda ordem era a das vintenas, sendo 20 vintenas "um quatrocentos"; a terceira ordem era a dos quatrocentos, etc. No entanto, o sistema de numeração desta civilização pré-colombiana destacou-se por utilizar o zero como um *marca-lugar* (uma concha). Através desse sofisticado pormenor, o sistema maia já não precisava de distinções contextuais. Por exemplo, escrito de cima para baixo, o número "9 quatrocentos, 0 vintenas e 11 unidades" ($3611 = 9 \times 400 + 0 \times 20 + 11$, no nosso sistema atual de numeração) era representado da seguinte forma:

Com esta inovação resultante da utilização do zero como um marca-lugar, já não havia problema de confusão do número anterior com o número "9 vintenas e 11 unidades" ($191 = 9 \times 20 + 11$, no nosso sistema de numeração), que era representado por:

Todos estes desenvolvimentos, além de engenhosos, estão recheados de razões ligadas a aspetos naturais, anatómicos, aritméticos, etc. Os números 5, 10 e 20 estão naturalmente relacionados com a quantidade de dedos que temos nas mãos e nos pés. O número 60 tem uma justificação aritmética. Nas feiras, a dúzia é muito utilizada por ser o número natural mais pequeno que pode ser dividido por 2, 3 e 4. Sendo assim, se três amigos comprarem uma dúzia de ovos, podem dividi-la entre si. O mesmo se forem 2, 4 ou 6 amigos, para não mencionar os extremos 1 e 12. O número 60 também tem muitos divisores, sendo o menor número natural que pode ser dividido por 2, 3, 4, 5 e 6. Esse facto é benéfico para o quotidiano. Por exemplo, nós dividimos a hora em 60 minutos, o que faz com que meia hora, um terço de hora, um quarto de hora, um quinto de hora e um sexto de hora correspondam a um número certo de minutos. Para não falar dos restantes divisores de 60. O 360 é o menor número natural a poder ser dividido por todos os naturais da primeira dezena, à exceção do 7. Por isso o usamos nas medições de amplitudes. Para não falar que está próximo da duração de um ano solar. Ao leitor interessado nos desenvolvimentos históricos dos sistemas numéricos aconselhamos a obra em português [7].

O sistema que temos, e que damos como certo e simples, é o resultado do fantástico engenho humano. Por exemplo, quando escrevemos o numeral relativo ao número treze, "13", estamos na realidade a utilizar uma numeração mista. Isso acontece porque, como vimos, o nosso sistema de numeração é posicional e os símbolos valem conforme a posição que ocupam. Neste caso, em relação a **13**, **1** vale uma dezena e **3** vale três unidades. Treze, na sua escrita matemática atual, traduz a organização uma dezena mais três unidades; dez unidades de uma ordem numérica são alvo de uma composição para uma unidade da ordem numérica seguinte. Dez é uma escolha humana, relacionada com o facto de termos dez dedos nas nossas mãos, e é por isso que o nosso sistema se diz decimal.

Da mesma maneira que a convergência para a notação posicional atual foi historicamente lenta e não foi fácil, para uma criança de 5 anos este conceito é difícil. Se experimentar dizer que o "1" do "13" vale dez, isso não terá qualquer significado para a criança, pois ela vê um "1". O professor deve procurar desenvolver estratégias eficazes na abordagem do sistema de numeração decimal, que passam inevitavelmente por ilustrar e esquematizar, seguindo uma abordagem "concreto-pictórico-abstrato", de que falaremos um pouco mais à frente.

Também é curioso verificar que temos um problema linguístico de articulação com a notação matemática, de natureza posicional. Por exemplo, em português, as palavras"onze", "doze", "treze", "catorze", "quinze", "vinte", entre outras, não têm grande significado do ponto de vista das ordens numéricas. A palavra "dezasseis" já traduz a ideia de "dez e seis". Em inglês, também há esse problema, por exemplo, com as palavras "*eleven*" ou "*twelve*". Por outro lado, se usarmos o *google* tradutor para ver o que se passa em chinês simplificado (caso não saibamos chinês!) constatamos um facto muito interessante, ilustrado na Figura 2.

1 一 Yī
2 二 Èr
3 三 Sān
4 四 Sì
5 五 Wǔ
6 六 Liù
7 七 Qī
8 八 Bā
9 九 Jiǔ
10 十 Shí
11 十一 Shíyī
12 十二 Shí'èr
13十三 Shísān
14 十四 Shísì
(…)
20 二十 Èrshí
21 二十一 Èrshíyī
(…)
75 七十五 Qīshíwǔ

Figura 2: Números em chinês simplificado.

Em chinês, a fala e a escrita posicional correspondem na perfeição! Referimo-nos, por exemplo, ao 14 como sendo "dez e quatro" ou ao 75 como "sete dez e cinco". Como na China a correspondência está explícita na língua materna, a aprendizagem do conceito de ordem numérica fica facilitada. No interessantíssimo capítulo 4 de [6], na secção *The cost of speaking english*, o leitor pode ler mais sobre a análise científica e as consequências deste facto singelo. Outros interessantes estudos exploram comparações entre vários países [14].

Na escrita dos numerais usamos um esquema consideravelmente mais sofisticado, imaginativo e expedito do que o que vemos na gruta de Lascaux. Além disso, essa escrita está uniformizada no mundo. Em relação à língua isso já não se passa assim. Não temos uma uniformização e isso tem alguns reflexos nas aprendizagens nos diferentes locais do mundo. Em particular, no que diz respeito ao caso português, os educadores devem estar bastante atentos a este facto. Exploraremos formas de passar boas mensagens relativas a esta importante questão no universo da educação pré-escolar e dos primeiros anos do 1.° ciclo do ensino básico.

2 A importância da representação

Uma ideia muito importante relativa ao ensino da matemática nos primeiros anos diz respeito à intermediação da passagem de tratamentos concretos para tratamentos abstratos, através do que se pode chamar de esquemas, de acordo com a abordagem "concreto-pictórico-abstrato" de origem em teorias construtivistas do conhecimento [4]. Para se perceber melhor o que se pretende dizer, 3 morangos é algo concreto; ao contrário, o numeral "3" é abstrato na medida em que é aplicável a milhares de situações quotidianas envolvendo essa quantidade. Uma das mais admiráveis características do ser humano é a faculdade de conseguir pensar e manipular conceitos abstratos de uma forma desligada da realidade. Na matemática, os números e as formas são exemplos de objetos abstratos. Se se tratasse de 3 cruzes, estaríamos perante um esquema. Quando se propõe uma atividade a uma criança que consiste em desenhar um número de bolinhas correspondente ao número de carros que vê numa imagem estamos perante uma atividade de natureza esquemática ou pictórica. Nesse sentido, o que se vê na gruta de Lascaux diz respeito a uma fase esquemática na história dos sistemas de numeração.

Em relação aos conjuntos representados na Figura 3, qual é o exemplo em que é mais fácil contar os objetos?

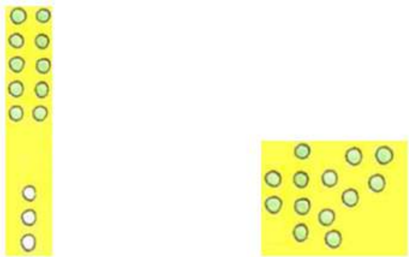


Figura 3: Organização *versus* desorganização.

O leitor não terá dificuldade em concordar que é o exemplo da esquerda. A razão para isso é simples: a representação da quantidade já está próxima da forma como organizamos o número 13 na sua representação decimal. Aliás, uma das estratégias que usualmente utilizamos para contar é a *contagem organizada*, que consiste em organizar os objetos de forma a facilitar a contagem em termos visuais. Neste sentido, as representações são fundamentais nas primeiras aprendizagens da ordem das dezenas. A Figura 4 ilustra alguns exemplos.

Os exemplos expostos são retirados de [13, 9, 10], excelentes livros do bem cotado ensino inicial de Singapura. Em cima, à esquerda, vemos as representações lado a lado com os numerais. A criança pode intuir o que significa realmente a representação numérica. Nos restantes exemplos, vemos a ideia da composição da dezena representada através de um colar e de uma caixa. Há uma ação associada ao importante processo de composição (fechar um colar, encher uma caixa). Compor a dezena é fundamentalmente dar estatuto de *coisa una* a um grupo de dez objetos.

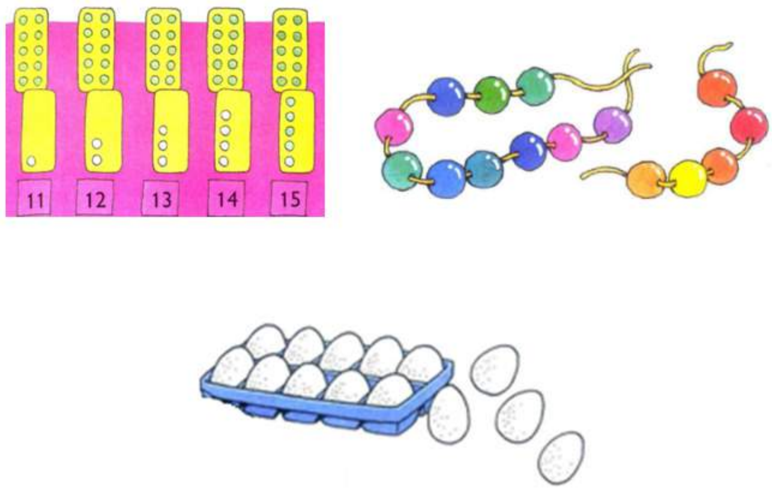


Figura 4: Representações numéricas.

Na Figura 5 vemos o mesmo tipo de apresentação em simultâneo, ou seja, segundo múltiplas perspetivas. Repare-se nos cartões sobrepostos (amarelo e rosa); esta importante ideia de sobreposição tem como finalidade passar a mensagem de que o símbolo “1” do numeral “14” vale uma dezena.

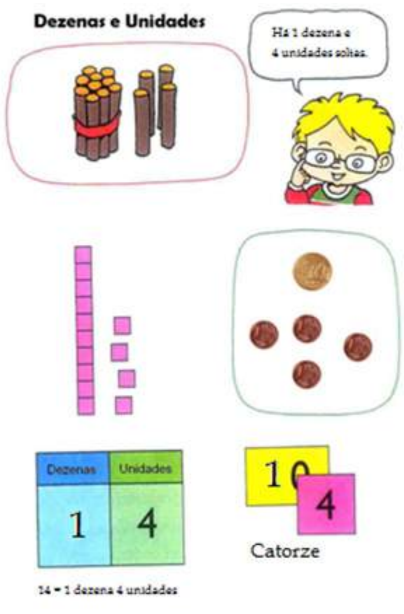


Figura 5: Apresentação em simultâneo.

A mesma ideia pode ser encontrada, por exemplo, em [11]. Foi desse trabalho que se retirou o exemplo da parte esquerda da Figura 6. Um esquema semelhante a um típico calendário é ilustrado na parte direita da mesma figura.

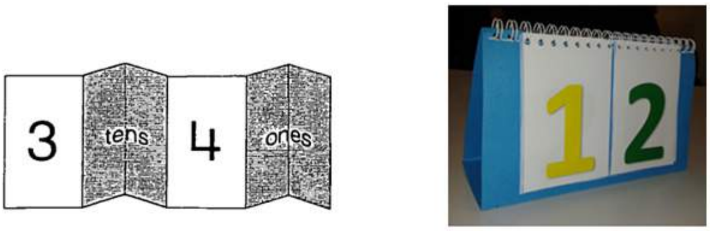


Figura 6: Mais representações.

Segue-se uma ideia desenvolvida por João Duarte, professor na Escola Básica Integrada dos Arrifes, nos Açores (Figura 7).[6]

Figura 7: Um dispositivo em madeira com algarismos móveis.

Ainda em relação à temática dos dispositivos com algarismos móveis, apresentamos outra ideia interessante [12]. Como se pode ver na Figura 8, a simples utilização de copos de plástico proporciona o dinamismo pretendido (deve-se retirar as vírgulas, que nos EUA são usadas para separar as diferentes classes numéricas).

Figura 8: Copos com algarismos.

[6] O vídeo `https://youtu.be/d8_F8IhLv6o` explica como utilizar este tipo de material.

Neste exemplo, o material está pensado para crianças do 1.° ciclo, no entanto, com um pouco de imaginação a ideia pode ser adaptada para a educação pré-escolar. Para fazer essa adaptação, deve considerar-se apenas os números de 10 a 19 (Figura 9), antes de se avançar para números superiores ou iguais a 20. Isto deve ser feito para respeitar uma ideia pedagógica importante: quando se apresenta pela primeira vez um conceito, este não deve aparecer no âmbito de muitos casos diferentes. Deve tentar afastar-se qualquer "ruído", ou seja, deve tentar *isolar-se o mais possível a ideia a trabalhar*. Podemos também acrescentar algumas imagens bonitas, bem como cores. É boa prática associar um carácter uno à dezena: um ramo, uma árvore, uma caixa.

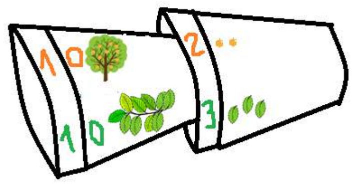


Figura 9: Copos com algarismos para o pré-escolar.

3 Atividades típicas

Uma atividade muito indicada para trabalhar o conceito de ordem numérica é a atividade *Separa/Pinta* 10 *e diz o número.*

Figura 10: *Pinta* 10 *e diz o número.*

Tipicamente a criança pinta 10 objetos (no caso da Figura 10, dez ovos para colocar na caixa [13]) e depois diz o número (olhando para a dezena composta e para as unidades soltas que sobraram). Este tipo de atividade também pode ser desenvolvido com objetos que a criança possa manipular (Figura 11, [9]). É perfeitamente possível começar a trabalhar desta forma com crianças de 5 anos utilizando números entre dez e vinte.

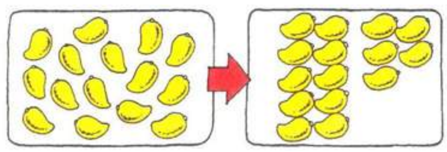


Figura 11: *Separa* 10 *e diz o número.*

Em [2], aconselha-se a utilização de materiais manipuláveis estruturados, como é o caso do material dourado ou material base 10 (Figura 12).

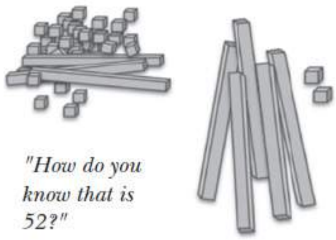


Figura 12: Representando um número com o menor número de peças possível.

Também se podem utilizar as clássicas barras *Cuisenaire* [5, 8] para trabalhar este tema [5, 8]. O educador vai colocando a barra laranja (10) ao lado das outras como se ilustra na Figura 13. À medida que faz isso, vai perguntando o número que está representado. Por exemplo, a barra laranja ao lado da branca é o número 11 $(10 + 1)$. O educador pode ir saltitando ao longo da escada.

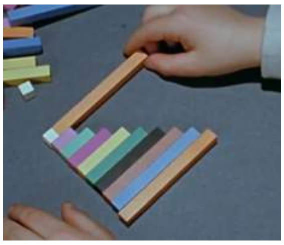


Figura 13: Atividade de exploração com as barras *Cuisenaire*.

O trabalho com a moldura do 10 também é uma ideia a ter em conta (Figura 14).[7]

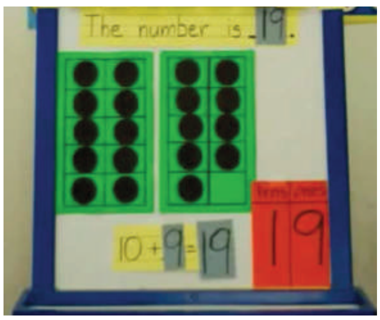


Figura 14: Atividade de exploração com a moldura do 10.

[7]Veja-se um exemplo em `https://youtu.be/PGgLPEdu2EA`.

Em [3], é analisado o *Base Ten Game* que consiste em lançar alguns dados, contar as pintas e arrumar paus de gelado numa tabela em conformidade com o número de pintas. Não se podem colocar mais do que 9 paus de gelado numa coluna (Figura 15). Sempre que isso acontece, tem se se prender os grupos de 10 com um elástico (mais uma vez o ato de compor).

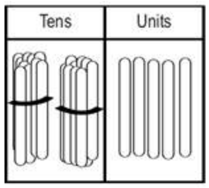


Figura 15: *Base Ten Game*.

As atividades podem ser construídas com abordagens concretas e abstratas em simultâneo. A Figura 16, acompanhada de um breve guião, ilustra mais um exemplo da utilização de um dispositivo com algarismos móveis.

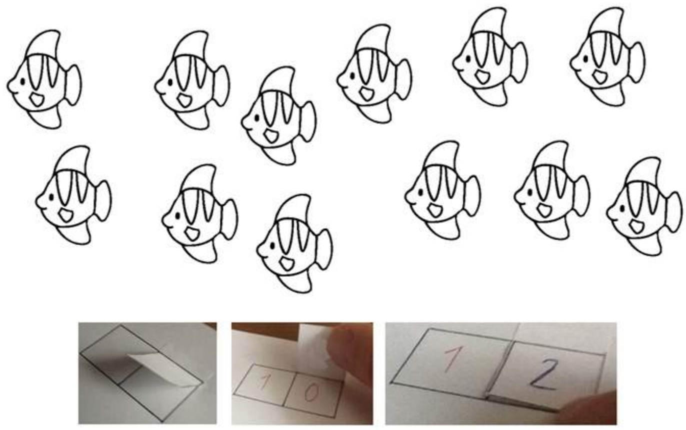


Figura 16: Utilização de um dispositivo com algarismos móveis.

Guião: Convida-se a criança a olhar para a imagem dos peixes. Pede-se que conte 10 peixes (em voz alta e apontando ao mesmo tempo). A criança deverá pintar 10 peixes de vermelho. Em seguida, convida-se a criança a escrever o numeral correspondente (10) nas quadrículas previamente preparadas. A criança deverá fazer essa tarefa com uma caneta de cor vermelha. O educador repete a informação "10 peixes pintados de vermelho", apontando com o dedo. Depois, pergunta quantos peixes não foram pintados, pedindo para que a criança os conte em voz alta. A criança deverá pintar esses peixes de azul. Pede-se à criança para que escreva o numeral (2) na quadrícula sobreposta à quadrícula do zero. A criança deverá fazer essa tarefa com uma caneta de cor azul. Por fim, pede-se à criança para que conte em voz alta todos os peixes (12). No final, chama-se a atenção da criança para o facto de existirem 12 peixes, 10 vermelhos e 2 azuis. Repete-se "É isso que é doze, dez mais dois". Quando o educador diz "Dez mais dois", deve fazer o movimento de sobreposição do 2 sobre o 0. A criança deverá ficar com a perceção clara que o "1" do "12" é o "1" do "10".

Quando ensinamos o que é o 12, temos que mostrar o 10 e tapar o "0" das unidades com um "2". Desta forma, o "1" do 10 já não parece tão estranho. A criança viu previamente o 10. As atividades em que se compõe a dezena e se utiliza um dispositivo com algarismos móveis podem ser empregues nos mais variados contextos. Apresentamos mais um exemplo de uma atividade, da autoria de Marylene Medeiros, aluna do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico, da Universidade dos Açores (Figura 17).

Figura 17: Vamos contar laranjas!

Guião: Coloque 16 laranjas na árvore. Peça à criança para contar 10 laranjas, à medida que as coloca dentro da grade, uma a uma, de modo a completar os dez espaços disponíveis. Pergunte "Quantas laranjas estão dentro da grade?" e "Quantas laranjas ainda ficaram na árvore?". À medida que responde, a criança regista as suas respostas no dispositivo com algarismos móveis. Por fim, pede-se à criança para que conte em voz alta todas as laranjas (16). No final, chama-se a atenção da criança para o facto de existirem 16 laranjas, 10 dentro da grade e 6 na árvore. Repete-se "É isso que é dezasseis, dez mais seis". Quando o educador diz "Dez mais seis", deve fazer o movimento de sobreposição do 6 sobre o 0. A criança deverá ficar com a perceção clara que o o "1" do "16" é o "1" do "10". Repete-se o mesmo procedimento para outros números.

No 1.º ciclo do ensino básico, as ações de compor e decompor uma unidade de certa ordem numérica são as ações mais importantes que existem. Explicam todos os algoritmos tradicionais e não tradicionais. Sendo assim, muito esforço deve ser dedicado a esta temática, desde logo na educação pré-escolar, com crianças de 5 anos.

4 Relação com a adição e a subtração

A partir de certa altura (5-6 anos), deverão ser propostas tarefas de decomposição. Com o objetivo de introduzir o tema, observe-se a Figura 18 retirada de [13].

Figura 18: *Number bonds.*

Esta é uma atividade clássica de decomposição utilizada no método de Singapura. São apresentados à criança uma imagem e um esquema todo-partes (*number bond*). A criança tem de fazer um trabalho "detetivesco" e explicar "onde vê" a decomposição na imagem. No caso concreto, algo do género "Estavam 5 animais na relva. 2 eram leões e 3 eram leoas.". Este tipo de atividade é executado em grandes doses com crianças de 5 e 6 anos. O todo escolhido deve ser inferior ou igual a 10. Pretende-se que as crianças interiorizem as decomposições aditivas em duas parcelas dos números da primeira dezena.

A pergunta que se impõe relaciona-se com a importância desta memorização. Qualquer pessoa habituada à matemática pode intuir facilmente a razão. Usando um argumento mais técnico, que podemos encontrar por exemplo em [18], as crianças (e os adultos!) poderão usar o conhecimento sobre as decomposições para executar cálculos mais sofisticados. Imagine-se o cálculo mental $7 + 8$. O número 8 está a precisar de 2 para compor a dezena. Uma vez que 7 se pode decompor em 2 e 5, a resultado do cálculo é igual a 15. Utilizou-se uma decomposição do 7. Veja-se a Figura 19 respeitante a esta ideia retirada de [9].

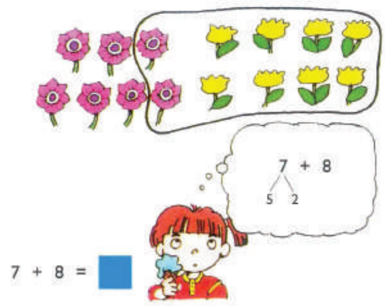


Figura 19: Adição mental.

Repare-se que não houve contagem continuada (contagem pelos dedos). Este método dá elevada importância à memorização das decomposições da primeira dezena e incentiva a sua utilização para fazer "pontes", compondo a dezena mais próxima. Observe-se que decompor não é o mesmo que adicionar. Se se partir das partes (2 e 5) para tentar obter o todo, estamos de facto a adicionar. O que acontece no exemplo exposto é o oposto, parte-se do todo (7) e separa-se de forma conveniente (2 e 5) para que se possa compor a dezena.

Além disso, qualquer uma das duas parcelas pode ser alvo de decomposição, como se ilustra na Figura 20.

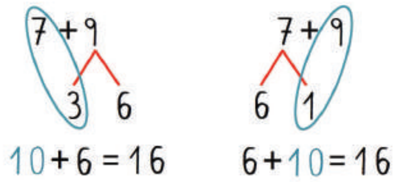


Figura 20: Diferentes formas de calcular $7 + 9$.

Uma boa memorização das decomposições da primeira dezena auxilia obviamente as adições. Trata-se, na prática, de incentivar a composição da dezena para obter o total. A compreensão do conceito de ordem numérica é absolutamente imprescindível para este tipo de cálculo mental. E não é só nas adições. Quanto às subtrações passa-se exatamente o mesmo. Por exemplo, para subtrair 4 de 12, pode ser feita uma "ponte" na dezena: uma vez que 12 é composto por uma dezena e duas unidades, após conveniente decomposição do 4, pode retirar-se primeiro 2 obtendo-se a dezena e depois novamente 2 obtendo-se 8 (Figura 21).

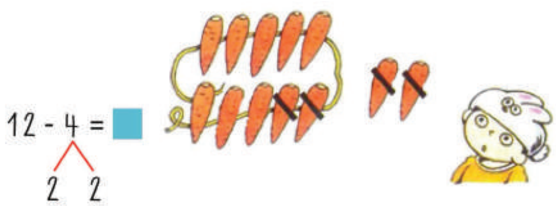


Figura 21: Subtração mental, por decomposição do subtrativo.

No exemplo anterior, fizemos a decomposição do 4 (subtrativo). Em alternativa, também poderíamos ter decomposto o 12 (aditivo): para tal, decompõe-se o 12 em 10 e 2 (uma dezena e duas unidades) e, em seguida, retira-se 4 a 10, obtendo-se 6. Adiciona-se no final 6 a 2, obtendo-se 8 (Figura 22).

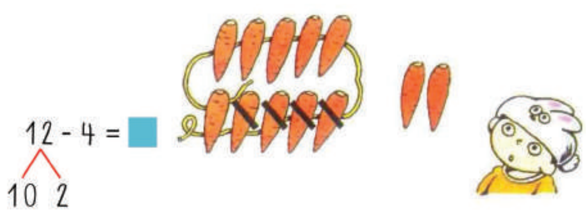


Figura 22: Subtração mental, por decomposição do aditivo.

Este tipo de estratégia aplica-se a uma infinidade de situações. Perceba-se bem o quão próximo este esquema mental está da atividade anteriormente descrita *Separa* 10 *e diz o número*. Na dita atividade, uma quantidade apresenta-se totalmente desarrumada e a criança organiza-a. Num contexto de adição, a quantidade apresenta-se repartida por duas parcelas (por exemplo, $8 + 5$) e a criança reorganiza-a de modo a obter a soma. Neste segundo caso, basta "empurrar" duas unidades do 5 para o 8. Sobre a utilização dos esquemas todo-partes na educação pré-escolar, aconselhamos [17].

Referências

[1] BBC-News, 2000. `http://news.bbc.co.uk/2/hi/science/nature/975360.stm`

[2] Berman, J. "A five minute assessment of place value", *Australian Primary Mathematics Classroom*, 16, 24–28, 2011.

[3] Broadbent, A. "Understanding place-value: A case study of the base ten game", *Australian Primary Mathematics Classroom*, 9, 45–46, 2004.

[4] Bruner, J. *The process of education*, Harvard University Press, 1960.

[5] Cuisenaire Company.`www.cuisenaire.co.uk`

[6] Dehaene, S. *The number sense*, New York: Oxford University Press, 1997.

[7] Estrada, M., Sá, C. *História da Matemática*, Universidade Aberta, 2000.

[8] Mathematics at Your Fingertips, NFB Full Video, 1961.`http://www.youtube.com/watch?v=JrMty8v2DqI`

[9] Hong, K. *Primary mathematics Textbook 1A*, American Edition: Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education of Singapore, Times Media Private Limited, 1981.

[10] Hong, K. *Primary mathematics Textbook 1B*, American Edition: Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education of Singapore, Times Media Private Limited, 1981.

[11] Irons, J. "Number representations that assist children to succeed in mathematics", Queensland University of Technology, 2002.

[12] Magical Maths. `http://www.magicalmaths.org`

[13] Marshall Cavendish Int (S) Pte Ltd, *Earlybird Kindergarten Math, STD ED, Textbook B*, Singapore, 2003.

[14] Miura, T., Okamoto, Y., Chungsoon K., Steere M., Fayol M. "First graders' cognitive representation of number and understanding of place value: Cross-national comparisons - France, Japan, Korea, Sweden, and the United States", *Journal of Education Psychology*, 85, 24–30, 1993.

[15] Santos, C. "A Ordem das Dezenas: Parte I", *Gazeta Valsassina*, 55, 14–15, Abril, 2014.

[16] Santos, C. "A Ordem das Dezenas: Parte II", *Gazeta Valsassina*, 56, 34–35, Junho, 2014.

[17] Santos, C., Teixeira, R. "Matemática na educação pré-escolar: Esquemas todo-partes", Jornal das Primeiras Matemáticas, 4, 55–70, 2015.

[18] Thompson, I. "The role of counting in the idiosyncratic mental calculation algorithms of young children", *European Early Childhood Education Research Journal*, 3, 5–16, 1995.

Vária

Frações (Parte I)

Carlos Pereira dos Santos, Ricardo Cunha Teixeira
Centro de Análise Funcional, Estruturas Lineares e Aplicações,
Núcleo Interdisciplinar da Criança e do Adolescente da Universidade dos Açores
cmfsantos@fc.ul.pt, ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Resumo: *A temática das frações é provavelmente o assunto mais delicado no que diz respeito ao ensino da matemática inicial. Por terem múltiplas aplicações, contextos e sentidos, as frações pedem um ensino altamente especializado e esmerado. Há que modelar de forma cuidadosa o conceito de fração, fasear e ordenar os nós conceptuais ao longo dos anos e dosear o caráter abstrato/concreto dos exemplos e atividades. Muito se testou, teorizou e escreveu sobre esta temática. Este trabalho consiste num resumo alargado sobre o ensino das frações, documentado em literatura especializada e ilustrado através de exemplos concretos retirados de manuais do* Singapore Math*, um dos mais cotados métodos de ensino do mundo.*

Palavras-chave: Dízimas, escalas, frações, frações equivalentes, numerais mistos, números racionais, operações aritméticas, percentagens, proporções, razões, regra de três simples, resolução de problemas, *Singapore Math*.

1 Introdução

Em [1], o matemático israelita Ron Aharoni cita um texto do séc.XV para argumentar que as frações já foram matéria do ensino superior. Independentemente da discussão histórica sobre o assunto, o autor quis passar a mensagem de que a temática das frações é consideravelmente sofisticada. De facto, esta temática constitui um dos assuntos mais melindrosos no que diz respeito ao ensino da matemática inicial. Uma das razões para tal é a necessidade constante de contextualização. Quando dizemos $\frac{2}{3}$, estamos frequentemente a mencionar duas terças partes de alguma coisa. Basta que numa mesma frase se mencionem duas frações relativas a todos diferentes para se lançar o caos: "$\frac{2}{3}$ de quê?", "$\frac{5}{7}$ de quê?". Quando dizemos "a relação é de 2 para 3", estamos novamente a relacionar grandezas, não sendo possível perceber quais são se dissermos apenas $\frac{2}{3}$. As frações são abstratas, sendo *relativas* a algo.

Outro problema que as frações levantam diz respeito à álgebra que envolvem. Pensemos nos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Se adicionarmos dois números naturais, obtemos novamente um número natural. No entanto, se quisermos fazer uma compra de 100 euros e só tivermos 80, podemos propor pagar com o que temos e ficar a dever. Como $80 - 100 = -20$, utilizamos os números negativos para exprimir essa dívida. Foi necessário estender o conjunto dos naturais. Passamos a lidar com os números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, pelo que *temos de aprender a operar com eles* (e.g., adicionar, subtrair, multiplicar e dividir). Imaginemos, agora, que temos um bolo e queremos dividi-lo igualmente com um amigo. *Os números inteiros já não chegam.* A melhor forma de descrever o que cada um recebe recebe é dizer "meio bolo", ou seja, $\frac{1}{2}$ bolo. E, mais uma vez, tendo sido feita nova extensão, precisamos de saber operar com estes objetos a que chamamos *frações*. É um péssimo sintoma vermos os jovens a transformar o elegante objeto $\frac{1}{2}$, a melhor forma de referir metade, em $0,5$. Isto porque $0,5$ é apenas mais uma forma de referir cinco décimos, ou seja, $\frac{5}{10}$. Transformou-se algo minimalista e irredutível numa representação menos elegante da mesma quantidade. Este sintoma revela que o jovem não está à vontade com as frações, tendo tendência para pensar em termos de representações decimais. Na maioria dos casos, não é esse o procedimento certeiro. Não devemos fugir da álgebra que as frações envolvem, mas sim aprendê-la. E a nossa cultura matemática aumenta de forma muito vincada ao fazer isso.

Segundo David Sousa, autor do livro *How the brain learns Mathematics* [14], estudos realizados no âmbito das Neurociências Cognitivas têm revelado resultados intrigantes, que apontam para a existência de uma reta numérica mental que nos ajuda a comparar números, sendo que a rapidez com que comparamos dois números depende não só da distância entre eles como também da sua ordem de grandeza (ver Figura 1). É, portanto, mais rápido decidir que $73 > 34$ do que $73 > 72$ e que $3 > 2$ do que $73 > 72$.

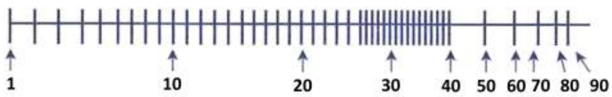


Figura 1: Reta numérica mental.

Qual a importância desta descoberta? Percebemos que a reta numérica mental oferece uma intuição limitada sobre os números, estando apenas contemplados os números naturais. Este facto pode explicar a falta de intuição quando lidamos, por exemplo, com números negativos e com frações, que não correspondem a qualquer categoria natural no nosso cérebro. Para os compreender, é necessário construir modelos mentais adequados.

Os primeiros contactos com as frações sucedem normalmente com 6 ou 7 anos de idade. A partir daí, o seu tratamento deve ser cuidadosamente faseado. Isto porque um dos motivos para a temática ser melindrosa é o facto de as frações encerrarem múltiplas utilizações e contextualizações. Uma pequena lista ordenada é a seguinte:

1. O que é uma fração? Fração como relação todo-partes.
2. Representações distintas da mesma quantidade. Frações equivalentes.
3. Mesma natureza e mesmo denominador. Adição e subtração de frações.
4. Fração como multiplicador e multiplicando. O que é a multiplicação de frações?
5. Medir e repartir. Noção de inverso e divisão de frações.
6. Quantas unidades há numa fração? Numeração mista.
7. Como se relacionam as frações com o sistema de numeração decimal?
8. Relacionar dois valores de uma mesma grandeza. Fração como razão.
9. Fração para relacionar grandezas diferentes.
10. Igualdade de relações. Frações ao serviço das proporções e regra de três simples.
11. Como se relacionam as frações com as percentagens?
12. Como se relacionam as frações com as escalas?
13. Resolução de problemas envolvendo frações.

Discutiremos os diferentes tópicos desta lista em dois textos separados. No entanto, estes conteúdos devem ser encarados de forma sequencial e articulada. Uma boa revisão da literatura sobre o tema das frações pode ser encontrada em [4].

2 O que é uma fração? Fração como relação todo-partes

Tal como a generalidade das representações numéricas, as frações têm múltiplos sentidos e aplicações. No entanto, a sua utilização para indicar um certo número de partes iguais, provenientes da divisão de um dado todo, deve ser o primeiro sentido a ser abordado. A noção de *todo* ou *unidade*[1] é central para uma boa compreensão do conceito de fração e traz, a si associada, a ideia fundamental de *representação* ([3] constitui uma boa referência complementar). A primeira mensagem sobre frações a transmitir a uma criança está ilustrada na Figura 2.

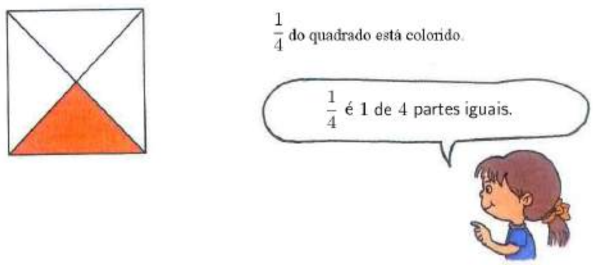


Figura 2: O que é uma fração? [8]

[1] Ao contrário de outros autores, optamos prioritariamente por "todo" em vez de "unidade" para podermos utilizar o termo "unidade" noutros contextos. Por exemplo, $\frac{4}{5}$ representa uma quantidade expressa em quintos. O "quinto", por si só, pode ser encarado como sendo a unidade em que a fração está expressa.

Uma fração interpretada no sentido da relação todo-partes encerra em si duas informações:

- Em quantas partes iguais é dividido o todo (denominador);
- Quantas dessas partes constituem a quantidade em causa (numerador).

O número de partes iguais em que o todo é dividido traduz a natureza da unidade em que a fração é expressa: podem ser meios, podem ser terços, podem ser quartos, etc. Na medida em que é algo qualitativo, precisa de ser denominado (meios, terços, ...). Daí o nome "denominador" – denomina uma natureza. Por outro lado, ao estipularmos a quantidade de meios, terços, ..., estamos perante um juízo quantitativo. Daí o "numerador" indicar quantas partes temos. Esta mensagem deve ser transmitida às crianças da forma mais eficaz possível. Os papéis do numerador e do denominador devem ser desvendados através de frases simples como, por exemplo, a que se segue:

"$\frac{2}{5}$ são **2** de **5** partes iguais que formam o todo."

Numa frase como esta está tudo dito. Em quantas partes iguais se divide o todo? Cinco. Quantas dessas partes temos? Duas. Eis o denominador e o numerador.

Neste processo inicial, há um conceito importante a ser desmistificado: a forma do todo ou das partes não é relevante. O que é relevante é haver um todo e este ser dividido em partes iguais. Por isso, é importante explorar o tema segundo múltiplas perspetivas. Na Figura 3 temos dois todos diferentes: um deles é uma pizza, o outro é um quadrado. Não é por essa diferença que $\frac{1}{2}$ deixa de estar representado em ambos os exemplos. Nas duas situações apresentadas, quer a pizza como o quadrado foram divididos em duas partes iguais.

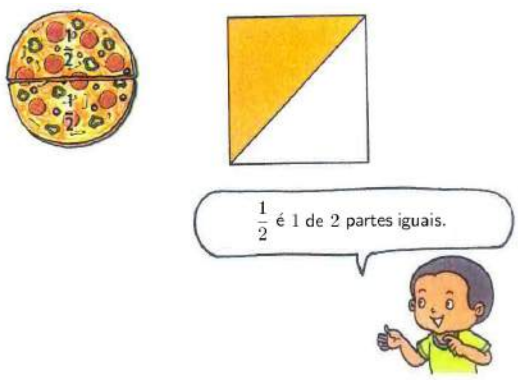


Figura 3: Todos diferentes [8].

Na Figura 4 temos dois exemplos relativos a um todo idêntico (um quadrado). Em ambos está representado $\frac{1}{4}$, *mas com formas diferentes.* Facilmente se intui que não é a forma das partes que interessa. São quatro partes, são iguais e juntas formam o todo; isso sim, interessa.

Figura 4: Partes diferentes [8].

Estas ideias sobre numerador e denominador são simples, mas não deixam de ser fundamentais. Deve haver alguma prática associada, tal como se ilustra na Figura 5.

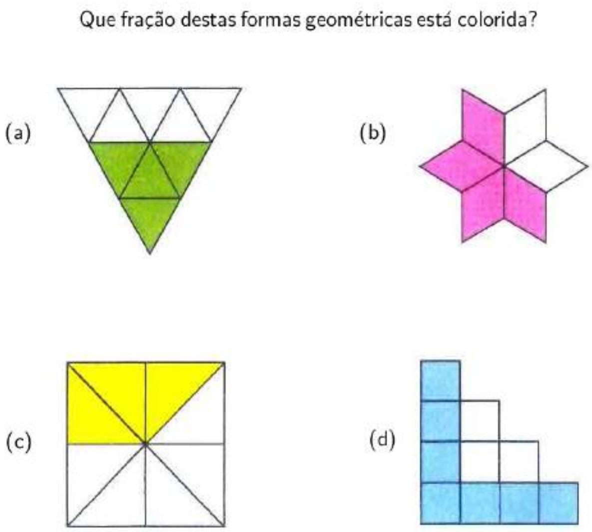


Figura 5: Exemplos variados [8].

Também são aconselháveis alguns exercícios que obriguem as crianças a pensar se as partes são ou não são iguais. Por exemplo, relativamente à alínea (a) da Figura 6, a criança deverá responder “O todo foi dividido em duas partes, mas as partes não são iguais. A zona azul é muito menor do que a branca, pelo que não corresponde a $\frac{1}{2}$.”.

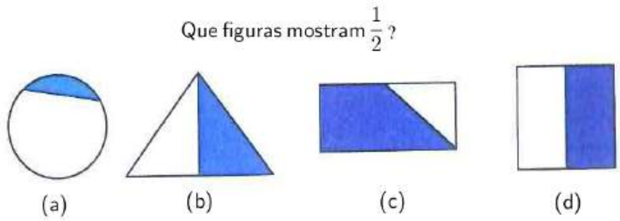


Figura 6: Partes iguais ou desiguais? [8]

É de realçar também a importância de se explorar o tema das frações seguindo a abordagem Concreto>Pictórico>Abstrato (CPA), que remonta aos trabalhos do psicólogo americano Jerome Bruner [5]. Nos primeiros anos de escolaridade, todos os temas devem ser introduzidos partindo do concreto. Nesse sentido, é importante utilizar objetos do dia a dia ou fotografias desses objetos (e.g., pizzas, bolos, tabletes de chocolate, ...). A utilização de materiais manipuláveis também é recomendável, desde as barras *Cuisenaire* (Figura 7) aos blocos padrão (Figura 8), passando por simples legos (Figura 9).

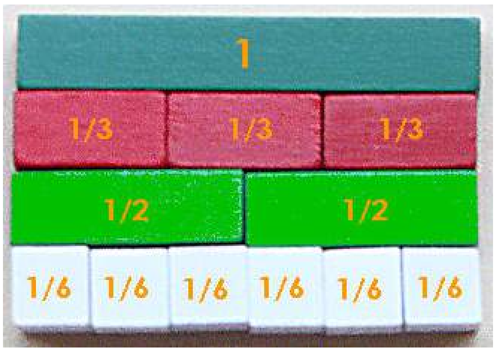


Figura 7: Explorar as frações com as barras *Cuisenaire* [11].

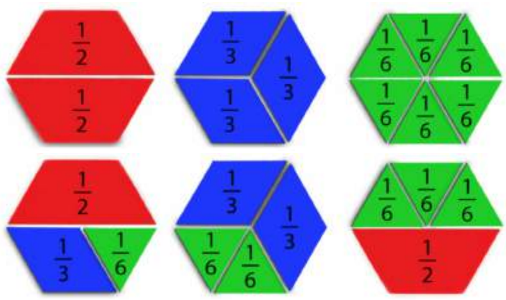


Figura 8: Explorar as frações com os blocos padrão [6].

O aluno deve perceber que a matemática pode ser usada para interagir com o meio que o rodeia e para resolver problemas da vida real. Por seu turno, os

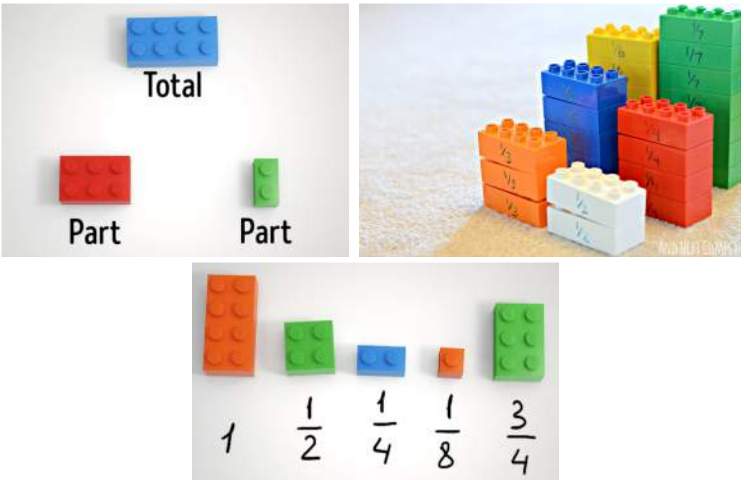


Figura 9: Explorar as frações com legos [12, 16].

exemplos pictóricos constituem representações de materiais concretos que ajudam os alunos a visualizarem conceitos matemáticos (e.g., um círculo dividido em partes iguais, um retângulo dividido em partes iguais, ...). Já no âmbito do abstrato, o trabalho formal com os símbolos permite mostrar aos alunos que existe uma maneira mais rápida e eficaz de representar um determinado conceito (e.g., $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, ...). O significado de cada símbolo deve estar firmemente enraizado em experiências com objetos reais. A passagem do concreto ao abstrato pode ser consideravelmente delicada para a criança. Trata-se de todo um caminho a ser percorrido de forma faseada, passo a passo.

Como já exemplificamos, as partes que compõem o todo não têm que ser obrigatoriamente sectores circulares de um círculo. Mas podemos ir mais longe de modo a trabalhar o tema das frações segundo múltiplas perspetivas. David Sousa [14] apresenta um exemplo que não se baseia nos tradicionais modelos geométricos. A ideia passa por propor uma caça ao tesouro, que se baseia na descoberta de palavras-chave que conduzem ao tesouro. Por exemplo, supondo que o tesouro está escondido perto da cadeira do professor, a palavra CADEIRA pode ser descoberta ao resolver o seguinte enigma: "Para descobrires a palavra secreta, precisas dos primeiros $\frac{2}{4}$ de CASA, dos primeiros $\frac{3}{6}$ de DEITAR e dos últimos $\frac{2}{8}$ de TERCEIRA". Este exemplo tem a vantagem de também se poder trabalhar a divisão silábica.

Nesta fase inicial de aprendizagem, duas ideias adicionais podem ser tratadas: *comparações simples* e *o ato de completar o todo*. Uma das comparações simples é bastante direta, dizendo respeito a naturezas idênticas. O que é maior $\frac{4}{7}$ ou $\frac{3}{7}$? Estando ambas as frações expressas na mesma natureza (sétimos), evidentemente que quatro é maior do que três. A comparação simples mais interessante não é tão direta e está expressa na Figura 10.

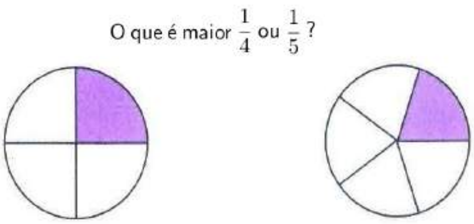


Figura 10: Comparações [8].

Neste caso, a natureza é distinta (no exemplo, um quarto e um quinto). E a comparação pode parecer paradoxal a uma criança, uma vez que 5 é maior do que 4, mas $\frac{1}{5}$ é menor do que $\frac{1}{4}$. Com uma situação concreta, o conceito pode ser clarificado: "Tendo dois bolos iguais, um para ser dividido igualmente por quatro amigos e o outro para ser dividido igualmente por cinco amigos, em qual dos grupos se come mais, no primeiro ou no segundo?" Para captar a atenção da criança para uma determinada tarefa matemática deve-se procurar uma ligação emocional com o tema a explorar. Não só conseguimos captar a sua atenção como também estimulamos a criança a aplicar a matemática em situações concretas do dia a dia. As abordagens "Hoje vamos estudar frações." e "Vamos dividir esta pizza! Preferem $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ da pizza?" são completamente distintas. Segundo David Sousa [14], se um professor não conseguir responder à pergunta "Por que razão precisamos de saber isto?", de uma maneira que faça sentido e tenha significado para os seus alunos, então terá que repensar necessariamente aquilo que está a ensinar.

O ato de *completar o todo* também deve ser incentivado nesta primeira fase. Pense o leitor quantas vezes na vida teve um raciocínio do tipo "Já tenho três quartos do pretendido; ainda falta o outro quarto.". A Figura 11 ilustra esse tipo de pensamento.

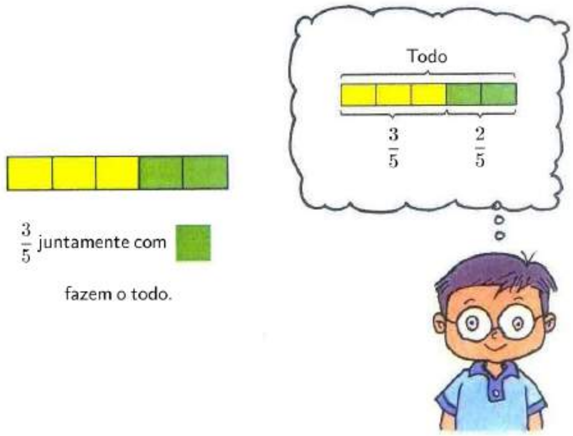


Figura 11: Completar o todo [8].

Exercícios envolvendo sombreados e pinturas podem ser propostos de forma gradual. Em relação a cada um dos três casos da Figura 12, a criança é convidada a descobrir que fração do todo corresponde à parte sombreada. Nestes casos, a tarefa já não é de todo evidente. Isso porque já não há uma correspondência direta entre o sombreado e um número de partes iguais que subdividem o todo.

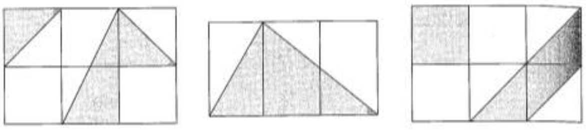


Figura 12: Exercícios mais sofisticados.

Por exemplo, considerando o caso da esquerda, a chave consiste em perceber que, na coluna do meio, a zona sombreada corresponde a um quadrado, na medida em que dois quadrados são divididos em duas partes iguais. Sendo assim, se usarmos meio quadrado para dividir o retângulo completo em doze partes iguais, o que se tem é $\frac{4}{12}$.

3 Representações distintas da mesma quantidade. Frações equivalentes

Antes de tratar da álgebra relacionada com as frações (adição, subtração, multiplicação e divisão), é imprescindível abordar a noção de *equivalência de frações* ([18], para mais informação). A Figura 13 ilustra o conceito.

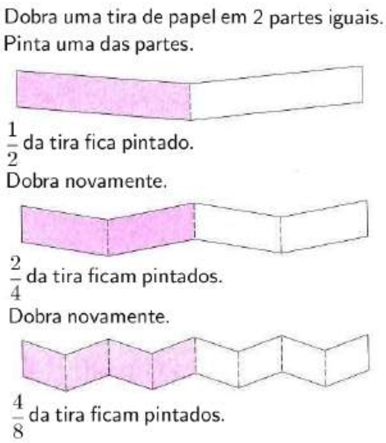


Figura 13: Frações equivalentes [9].

A dobragem da tira de papel expõe um facto simples: a mesma porção de fita pode ser representada através de formas diferentes ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, ...). A multiplicidade de representações para uma mesma quantidade baseia-se na mudança do número de partes iguais em que se subdivide o todo. Observe-se a Figura 14.

À esquerda, um bolo tem cinco fatias: quatro com cobertura de chocolate e uma com cobertura de baunilha. Naturalmente, a fração de bolo coberto com chocolate é $\frac{4}{5}$. À direita, está representado *exatamente o mesmo bolo*. Nesta segunda imagem, todas as fatias foram cortadas, ficando divididas em duas iguais. Passou a haver dez fatias em vez de cinco. Observando a imagem da direita, a fração de bolo coberto com chocolate é bem descrita por $\frac{8}{10}$. É claro que a *quantidade de bolo coberta com chocolate é exatamente a mesma*, consequentemente, $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$.

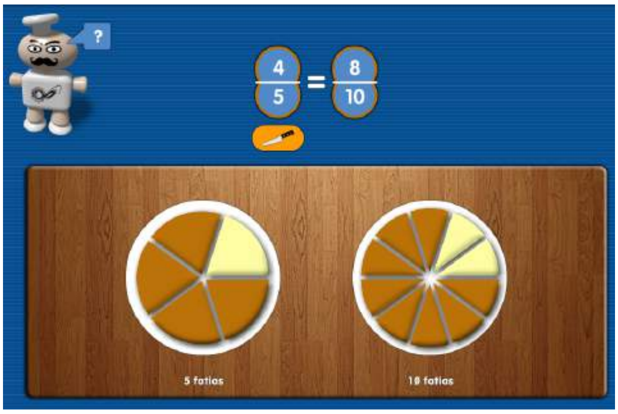


Figura 14: Frações equivalentes [2].

Analisando a situação do ponto de vista algébrico, a passagem de $\frac{4}{5}$ para $\frac{8}{10}$ obtém-se multiplicando o numerador e o denominador da primeira fração pelo mesmo valor, neste caso, 2. A multiplicação do denominador por 2 acontece porque passamos a ter o dobro das fatias, ou seja, o número de partes iguais duplica. Por outro lado, a multiplicação do numerador por 2 sucede porque a quantidade de fatias cobertas com chocolate também passa a ser o dobro. Todas as fatias passam a ser mais finas exatamente da mesma maneira, em particular, as de chocolate. Pode ver-se uma ilustração dinâmica do conceito na Figura 15.

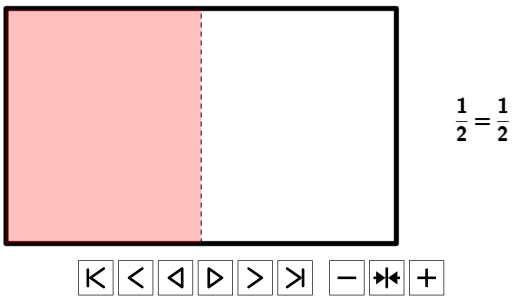


Figura 15: Frações equivalentes: uma ilustração dinâmica.

Nas primeiras aprendizagens sobre frações, é fundamental trabalhar o tema segundo múltiplas perspetivas. Em particular, é importante *diversificar a natureza do todo*. Se estipularmos que uma moeda de 1 euro é o todo temos o seguinte:

- a moeda de 50 cêntimos é $\frac{1}{2}$ euro – são precisas 2 para obter o todo;
- a moeda de 20 cêntimos é $\frac{1}{5}$ euro – são precisas 5 para obter o todo;
- a moeda de 10 cêntimos é $\frac{1}{10}$ euro – são precisas 10 para obter o todo;
- a moeda de 5 cêntimos é $\frac{1}{20}$ euro – são precisas 20 para obter o todo;
- a moeda de 2 cêntimos é $\frac{1}{50}$ euro – são precisas 50 para obter o todo;
- a moeda de 1 cêntimo é $\frac{1}{100}$ euro – são precisas 100 para obter o todo.

A Figura 16 ilustra a equivalência de frações com recurso ao sistema monetário. Este tipo de exemplo é especialmente interessante, na medida em que uma mesma quantia pode ser organizada através de trocos de maior ou menor valor. Na realidade, é exatamente essa a alma do conceito: uma mesma quantidade pode ser expressa com recurso a submúltiplos da unidade, maiores ou menores.

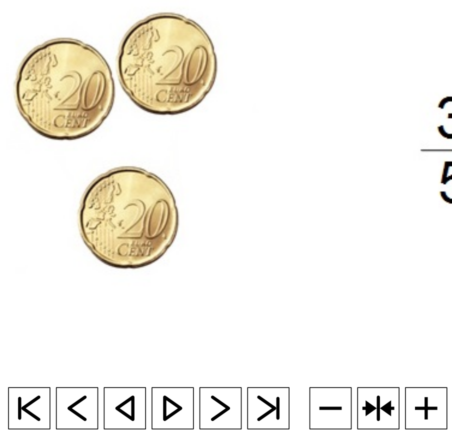


Figura 16: Frações equivalentes: uma ilustração monetária.

A equivalência de frações corresponde à simples divisão ou multiplicação do numerador e do denominador por um mesmo número diferente de zero. Devem ser propostos exercícios relacionados, tal como se mostra nas Figuras 17 e 18.

Todas as frações podem ser expressas através de uma *representação irredutível* em que o numerador e o denominador não podem ser divididos por um mesmo número natural diferente de 1 (o numerador e o denominador dizem-se *primos entre si*). Exemplos de frações irredutíveis são $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{10}{21}$, etc. Frações redutíveis como $\frac{24}{36}$ podem ser trasformadas numa fração irredutível num único passo dividindo numerador e denominador pelo maior número natural possível que o

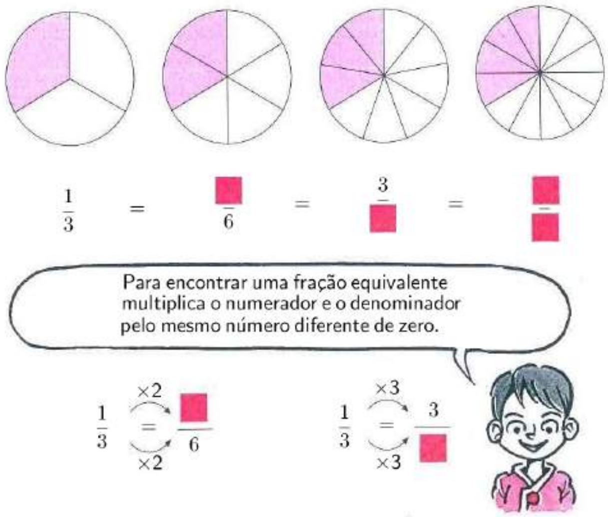


Figura 17: Frações equivalentes: ampliação do denominador [8].

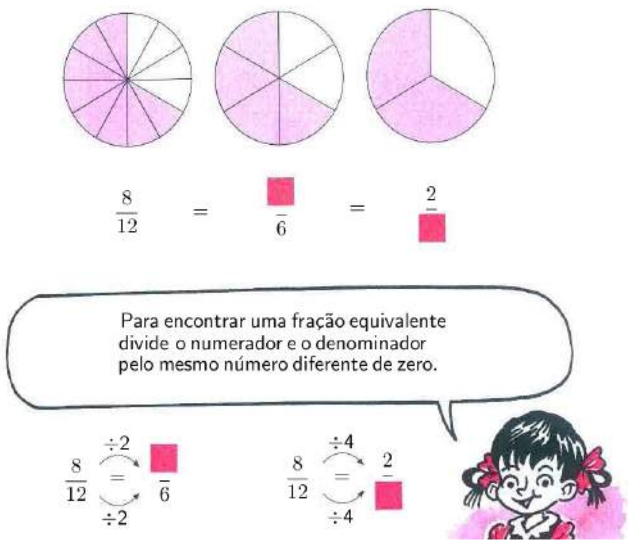


Figura 18: Frações equivalentes: redução do denominador [9].

permita (diz-se *máximo divisor comum*). Como o máximo divisor comum de 24 e 36 é o 12, pode dividir-se o numerador e o denominador de $\frac{24}{36}$ por 12, obtendo-se a fração irredutível $\frac{2}{3}$.

É perfeitamente possível tratar a equivalência de frações antes de abordar a questão das frações irredutíveis, máximo divisor comum de dois números, etc. O cotadíssimo método de ensino da matemática inicial utilizado em Singapura, *Singapore Math*, é um exemplo desta abordagem. Embora tratando a temática junto de crianças do terceiro ano de escolaridade (8 anos de idade) através de esquemas e exercícios como os das Figuras 17 e 18, opta por não aprofundar o assunto da irredutibilidade de frações na sua globalidade logo nessa fase. No entanto, importa frisar que exercícios como

$$\frac{2}{6} = \frac{?}{9}$$

podem e devem ser propostos. Estes casos são mais difíceis, uma vez que não há um factor multiplicativo inteiro que permita passar de $\frac{2}{6}$ para $\frac{3}{9}$ (não há nenhum natural que multiplicado por 6 resulte em 9). No entanto, $\frac{2}{6}$ é igual a $\frac{1}{3}$ ($\div 2$) e $\frac{1}{3}$ é igual a $\frac{3}{9}$ ($\times 3$). Esta análise está ao alcance de crianças do terceiro ano de escolaridade.

4 Mesma natureza e mesmo denominador. Adição e subtração de frações

Imagine o leitor que pergunta a uma criança de 5/6 anos "Quanto é três gatos mais duas rosas?". Mesmo que a resposta seja cinco, há claramente um problema de *lógica*. A pergunta seguinte pode ser "Cinco quê?". Naturalmente que não são nem cinco gatos nem cinco rosas. Quanto muito, seriam cinco *seres vivos*, na medida em que tanto os gatos como as rosas são seres vivos. Há uma espécie de lei fundamental nas adições e nas subtrações que é a necessidade de uma *natureza comum* para os objetos a contar de modo a que estas operações tenham lógica e façam sentido. Considere-se, na Figura 19, um exemplo que pode ser trabalhado ainda no contexto da educação pré-escolar. É solicitada uma história a uma criança, para ser usada ao serviço da aprendizagem da adição. Algo do tipo: "Estavam 7 formigas a comer um queijo. Chegaram mais 2 formigas. No final, ficaram 9 formigas a comer o queijo". Repare-se que os três números da igualdade $7 + 2 = 9$, o 7, o 2 e o 9, correspondem a quantidades de formigas. Tudo são formigas, a *natureza comum* dos objetos neste exemplo é evidente.

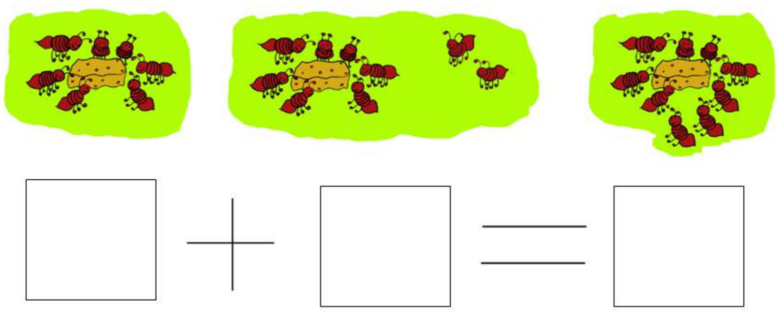


Figura 19: Uma adição simples.

Considere-se, agora, a Figura 20. É solicitada à criança uma frase que associe a imagem à igualdade $2 + 3 =?$ (a utilização de exercícios *figura+expressão matemática*, envolvendo uma figura e uma expressão matemática é uma imagem de marca do *Singapore Math*). Neste exemplo, a criança tem de *combi-*

nar os objetos. Ou seja, é deixada à criança a tarefa de encontrar uma natureza comum para os objetos a contar de modo a que a frase tenha lógica. Neste exemplo, a escolha pode recair sobre o facto de ambos serem *frutos*: "Temos 2 maçãs e 3 laranjas. Quantos *frutos* temos no total?". Debates sobre a natureza comum que os objetos devem ter de modo a que as adições e subtrações façam sentido são um daqueles pormenores importantes no âmbito das boas práticas didáticas. Isto porque o assunto é a alma da adição e subtração de frações, do famoso "vírgula debaixo de vírgula", da manipulação algébrica de expressões com incógnitas, entre outros exemplos. É algo absolutamente basilar para uma boa evolução do conhecimento matemático.

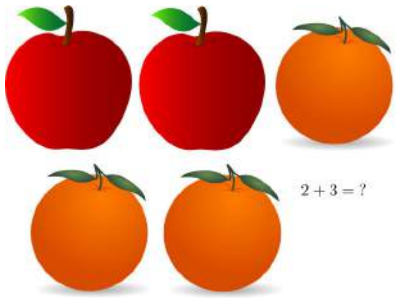


Figura 20: Combinar diferentes objetos.

Imagine que tem no bolso meio euro juntamente com vinte cêntimos. É prática intuitiva das pessoas pensar em cêntimos: "Tenho setenta cêntimos". A razão para tal corresponde à necessidade da procura por uma natureza comum: primeiro estipula-se uma natureza comum, que estabelece a *unidade em que se efetua a adição* e, em seguida, pensa-se na quantia tendo em conta essa unidade. Repare-se que também se podia pensar na quantia como sendo sete décimos de euro. Este pensamento só não acontece na prática porque estamos habituados a pensar nos décimos de euro como sendo moedas de dez cêntimos, ou seja, pensamos num décimo em centésimos. Este pensamento traduz-se no cálculo:

$$\text{Meio euro} + \text{vinte centésimos de euro} = \frac{1}{2}€ + \frac{20}{100}€ = \frac{50}{100}€ + \frac{20}{100}€ = \frac{70}{100}€.$$

A determinação de um denominador comum corresponde muito simplesmente a encontrar uma natureza comum para os termos em causa na adição ou na subtração (no exemplo dado foram os centésimos).

A Figura 21 ilustra uma primeira abordagem à adição de frações junto de crianças do 4.° ano de escolaridade. Ainda não há uma sistematização quanto ao processo para a determinação do denominador comum, mas sim uma *explicação sobre a necessidade dessa prática.* O professor deverá dizer frases como "Vamos colocar tudo em quartos <u>para podermos adicionar</u>. Um meio corresponde a quantos quartos?".

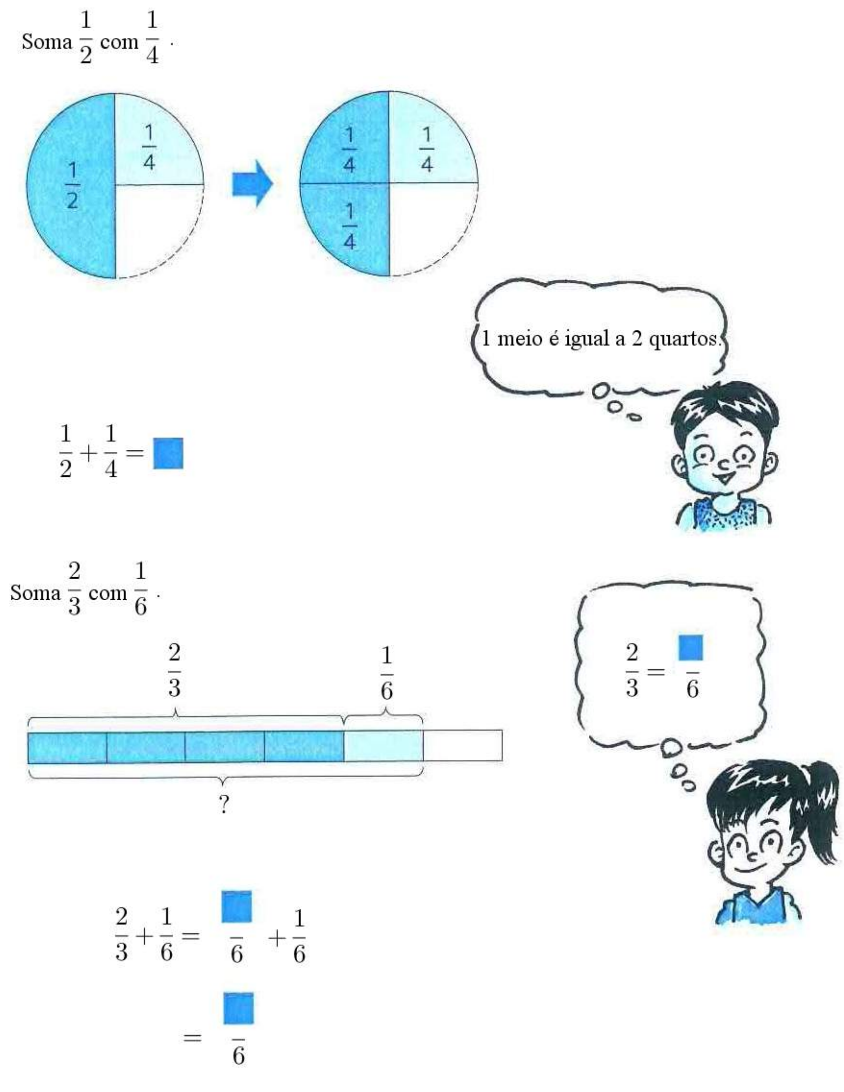


Figura 21: Adição de frações [10].

A Figura 22 constitui um exemplo do mesmo tipo quanto à subtração.

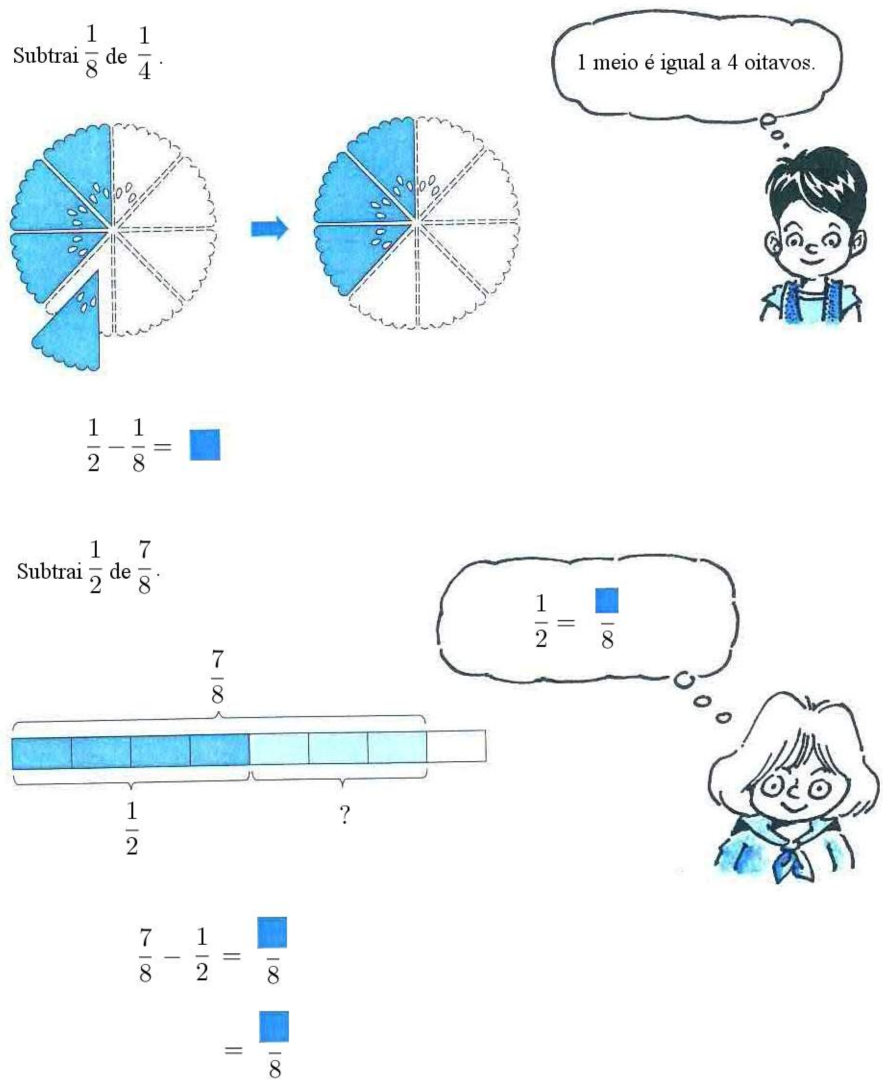


Figura 22: Subtração de frações [10].

Levanta-se a questão de *como determinar o denominador comum de forma expedita*. Por exemplo, considere o cálculo $\frac{3}{8} + \frac{1}{6}$. Há um mecanismo simples que consiste em considerar uma fração equivalente a cada parcela da soma, *utilizando como factor multiplicativo o denominador da outra parcela*. Isso fará aparecer um denominador comum igual ao produto dos denominadores originais (neste caso, 48).

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=\frac{18}{48}+\frac{8}{48}=\frac{26}{48}$$

Frequentemente, este método não dá origem ao menor denominador comum possível. Uma vez que o *mínimo múltiplo comum* de 8 e 6 é 24, a dita soma pode ser feita com recurso a esse denominador. É claro que $\frac{26}{48}$ e $\frac{13}{24}$ são equivalentes.

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=\frac{9}{24}+\frac{4}{24}=\frac{13}{24}$$

Tal como no caso da equivalência de frações, a temática da adição e subtração de frações com denominadores diferentes pode ser tratada junto de crianças a partir do 4.° ano de escolaridade (9 anos de idade) através de esquemas, sem aprofundar totalmente o assunto relativo ao mínimo múltiplo comum de dois números (mais uma vez, o *Singapore Math* é um exemplo dessa abordagem). No entanto, qualquer que seja o método, a noção de equivalência de frações deve vir *antes* das operações, uma vez que a *determinação da natureza comum recorre ao conceito de equivalência*.

Sendo esta uma fase de aprendizagem que já não é a inicial, convém referir que há vários modelos relativos a frações e não apenas os pictóricos contínuos que costumam ser utilizados na fase inicial. Em [4], encontra-se um resumo de uma classificação desses modelos. Na Figura 23, apresentam-se quatro:

(a) *modelo contínuo* (o todo é um único retângulo);

(b) *modelo discreto* (o todo é um *conjunto* de doze laranjas);

(c) *modelo linear* (caso particular de um modelo contínuo proposto com frequência no currículo português e fortemente defendido por Hung-Hsi Wu, matemático da Universidade da Califórnia, especialista na temática [19]);

(d) *modelo discreto* com componente mista (o todo é um conjunto de seis pares de laranjas com diferentes tamanhos).

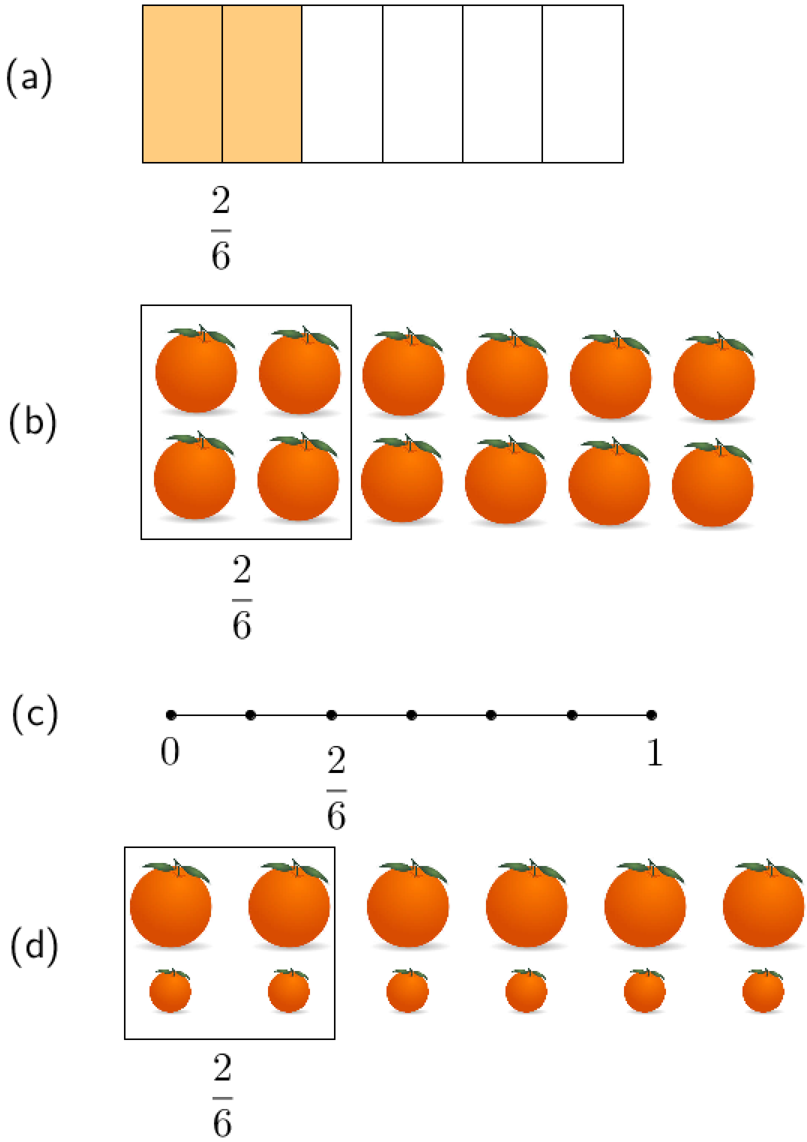


Figura 23: Modelos de representação das frações.

Um exemplo dinâmico de uma adição, esquematizado através de um modelo contínuo (retirado de [15]), é apresentado na Figura 24.

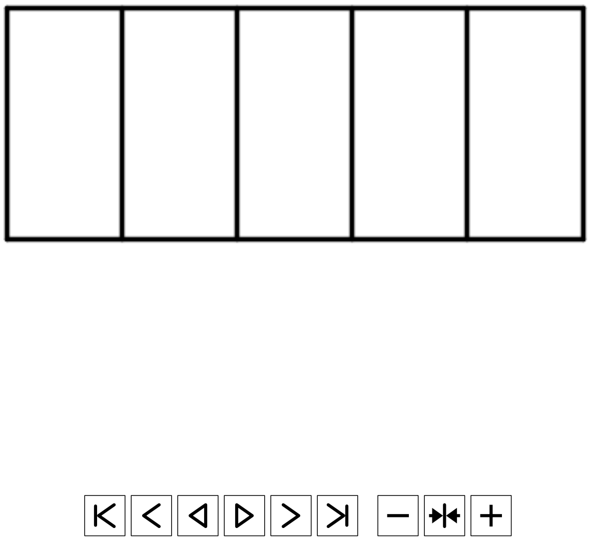


Figura 24: Adição de frações: uma ilustração dinâmica.

Esta aprendizagem esquemática sobre adições e subtrações é fundamental para alicerçar uma boa compreensão. A Figura 25 mostra uma boa atividade realizada por um aluno (retirado de [17]).

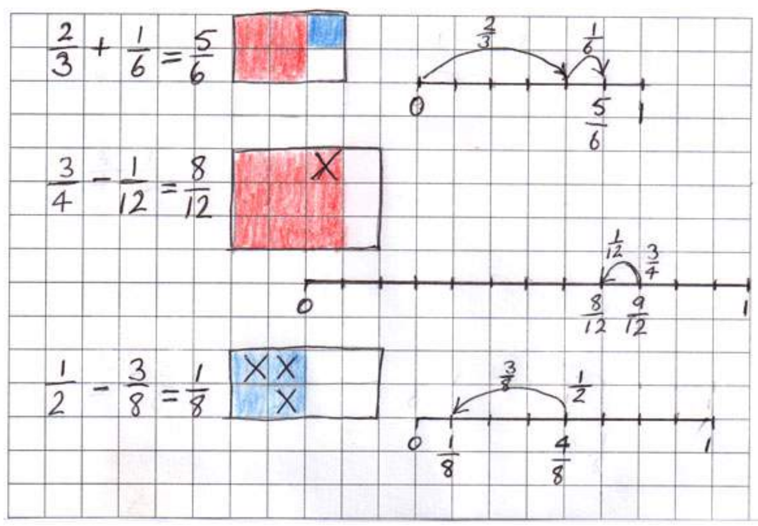


Figura 25: Atividade envolvendo dois modelos distintos.

5 Fração como multiplicador e multiplicando. O que é a multiplicação de frações?

Na capa de um livro sobre tabuadas da multiplicação, que preferimos deixar sob anonimato, apareceu a interessantíssima imagem exposta na Figura 26.

Figura 26: Tudo o que não deve ser feito.

O interesse do exemplo está no facto de mostrar *tudo o que não se deve fazer*. Se Jerome Bruner [5], um dos pais do construtivismo, defensor de um esmerado cuidado com a passagem do concreto ao abstrato (abordagem CPA), visse um exemplo destes, soltaria certamente esgares de horror! A imagem, ao utilizar morangos para dar um exemplo para concretizar a igualdade $2 \times 2 = 4$, vai contra o conceito mais fundamental da multiplicação no sentido aditivo.

Nas aplicações práticas da multiplicação no sentido aditivo, ao contrário do que se passa com as adições e subtrações, os fatores não têm a mesma natureza: um desempenha o papel de multiplicador e o outro de multiplicando.

As magníficas imagens expostas na Figura 27 constituem um bom exemplo.

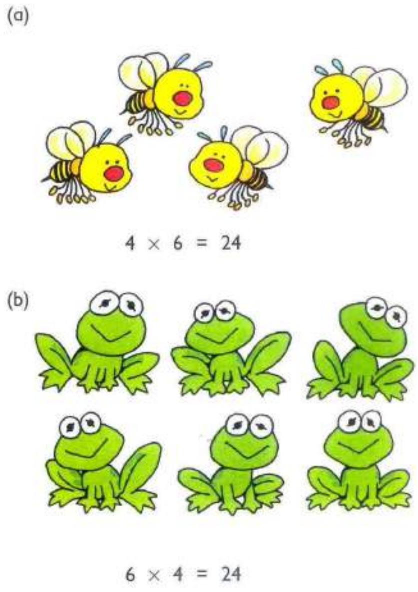


Figura 27: Multiplicador e multiplicando [7].

Esta atividade, do tipo *figura+expressão matemática*, constitui um excelente exemplo do que se deve fazer. Olhando para as abelhas, a criança tem de encontrar sentido para a igualdade $4 \times 6 = 24$. Trata-se de contar as *patas*: há quatro repetições (quatro abelhas) de conjuntos de seis patas (cada abelha tem seis patas). No total, há 4×6 patas $= 24$ patas. Observe-se que dos três números que compõem a igualdade (4, 6, 24), apenas o 6 e o 24 são patas. O 4 *não* é uma quantidade de patas, mas sim o *número de repetições.* O 4 tem um papel *operador*, sendo denominado de *multiplicador*. Da mesma forma que um explicador *ministra* a sua explicação ao explicando, que uma máquina replicadora *atua* sobre o ente replicado e que uma fotocopiadora *copia* o material a ser fotocopiado, também o *multiplicador* indica quantas vezes se repete o *multiplicando.* O primeiro tem informação sobre o *número de repetições* e o segundo, o seu alvo, constitui o material a ser repetido. Por isso, é completamente errado escrever 4 patas $\times$ 6 patas $=$ 24 patas. Isto parece um detalhe, mas é absolutamente fundamental para uma boa compreensão do que se segue.

Na Figura 28, apresenta-se um exemplo mediático, que circulou recentemente nas redes sociais. Face ao que se vê na imagem, houve muita contestação por esse mundo fora, uma vez que a professora queria que o aluno respondesse $3+3+3+3+3$ e não $5+5+5$. Por esse motivo, puniu a resposta da criança. A "zanga" atingiu níveis consideráveis e o assunto foi discutido tanto pelo cidadão comum como por especialistas. No entanto, entendemos que as críticas não foram colocadas de forma certeira. A nosso ver, a questão principal consiste no facto de *o exercício estar mal elaborado.* Do ponto de vista algébrico, é claro que 3×5 é igual a 5×3 (a contestação veio naturalmente do facto de a multiplicação ser comutativa). Sendo assim, para cumprir o objetivo de convidar o aluno a diferenciar os papéis de multiplicador e multiplicando, faltou uma coisa fundamental: contextualizar o exercício com uma situação da vida real.

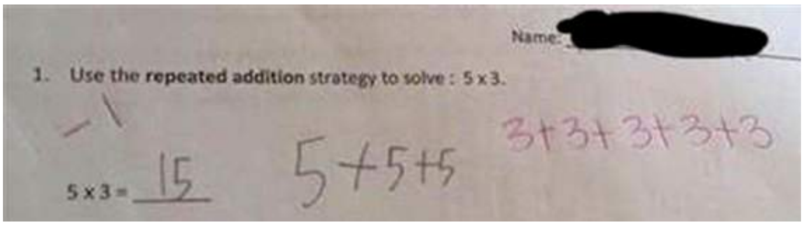


Figura 28: Um exemplo mediático.

A Figura 27 constitui um bom exemplo de dois exercícios bem feitos com o mesmo propósito. Em ambas as alíneas, é apresentada uma situação concreta lado a lado com uma igualdade (envolvendo uma expressão numérica com uma multiplicação). O aluno é convidado a explicar como se relaciona a abstração com a concretização. Em relação a estes exemplos, há uma clara interpretação sobre o que pode ser o multiplicador; por exemplo, no caso dos sapos, há 4 patas repetidas 6 vezes e, por esse facto, damos o papel de multiplicador ao 6. Os papéis de multiplicador e multiplicando não são uma questão de lateralidade, como no caso do exemplo mediático. Em 6×4, 6 não é multiplicador por estar à esquerda; isso não faz sentido algum. Perante os cálculos 6×4 e 4×6 em abstrato, não temos uma forma clara de atribuir o papel de multiplicador a um dos fatores, a não ser por intermédio de uma *convenção* que se possa estabelecer. No entanto, estando perante situações concretas, esse papel já vem da lógica trazida por essas situações. É claro que, na língua portuguesa, dizemos mais vezes "Tenho 3 vezes dois bolos." do que "Tenho dois bolos 3 vezes.". Devido a esse facto, há uma tendência para se dizer que o fator da esquerda é o multiplicador. No entanto, a razão linguística não é, de todo, o conceito vital. O fundamental é que, nas situações práticas, há algo que se repete e, quando as traduzimos em linguagem matemática, há uma informação sobre o número de repetições traduzida através de um número. A única forma de saber o que se repete e quantas vezes é repetido é partir de situações da vida real. Numa expressão algébrica abstrata, a questão não se coloca fora da nossa capacidade para definir coisas e estabelecer convenções (que, por sinal, é uma ótima e bem sucedida capacidade humana). Perante a questão "No cálculo 3×5, qual é o multiplicador e qual é o multiplicando?", a boa resposta é "Não sei. Qual é a situação concreta em que se está a aplicar o cálculo?". É por isto que a professora não devia ter punido o aluno. A origem do problema esteve, como acontece tantas vezes, numa conceção errada da questão a formular.

Relacionado com o tema dos papéis de multiplicador e multiplicando, está o modelo retangular da multiplicação. Este modelo constitui uma boa ajuda para a compreensão da multiplicação de frações. Considere-se a Figura 29.

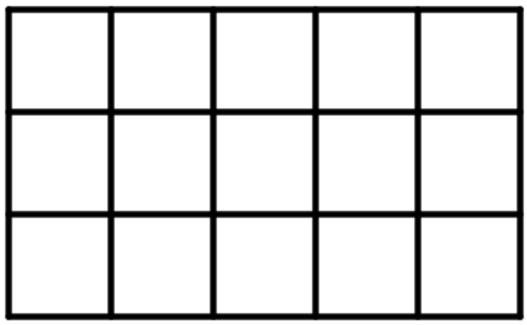


Figura 29: Multiplicação no sentido aditivo: modelo retangular.

Uma das ferramentas que as crianças do 1.° ciclo têm de aprender é a possibilidade de utilização da multiplicação no sentido aditivo para determinar o número de quadradinhos arrumados numa disposição retangular. *Não se trata de uma regra*, mas sim de uma aplicação da multiplicação. Há duas abordagens fundamentais, correspondentes a um raciocínio por linhas ou por colunas. Em relação ao primeiro, um possível diálogo pode ser o seguinte: "Quantas linhas há?"−"Três"; "Quantos quadradinhos há em cada linha?"−"Cinco"; "Nesse caso, há cinco quadradinhos que se repetem três vezes, 3×5 quadradinhos $= 15$ quadradinhos". Quanto ao segundo: "Quantas colunas há?"−"Cinco"; "Quantos quadradinhos há em cada coluna?"−"Três"; "Nesse caso, há três quadradinhos que se repetem cinco vezes, 5×3 quadradinhos $= 15$ quadradinhos". No primeiro caso, o número de repetições foi associado ao número de linhas, sendo este o multiplicador. No segundo, o número de repetições foi associado ao número de colunas, sendo este o multiplicador. Como bónus, a situação ilustra a propriedade comutativa da multiplicação.

Estamos, agora, em condições de explorar a multiplicação envolvendo frações. Tal como acontece com os números naturais, nas situações práticas de multiplicação no sentido aditivo, os fatores desempenham papéis diferentes. Como é de esperar, uma fração tanto pode desempenhar o papel de multiplicador como de multiplicando. No entanto, há um conceito adicional a ser compreendido.

Enquanto que, com números naturais, o multiplicador assume apenas o papel de replicador (contém a informação sobre o número de repetições), com frações passa a haver um novo papel que consiste em fazer "partes de". Quando dizemos "a terça parte de $\circledast$*", estamos a falar de* $\frac{1}{3} \times \circledast$*; quando dizemos "metade de* $\circledast$*", estamos a falar de* $\frac{1}{2} \times \circledast$*. Mais, o multiplicador pode conter em si mesmo uma dupla informação relativa a "repetições" e a "partes de". Por exemplo, quando dizemos "duas terças partes de* $\circledast$*", estamos a falar de* $\frac{2}{3} \times \circledast$ *e isso significa que temos duas repetições da terça parte de* $\circledast$*. Mais uma vez, o numerador quantifica e o denominador qualifica.*

Não se pode perceber a multiplicação de frações sem compreender este conceito. Na multiplicação não há a exigência de uma natureza comum, pura e simplesmente porque os fatores desempenham papéis diferentes ao serviço de uma operação aritmética que tem um objetivo diferente do da adição ou subtração. É por isso que não é exigida a determinação de um denominador comum. No caso da multiplicação no sentido aditivo, as melhores metáforas para o multiplicador são "fotocopiadora" e "faca". A primeira replica e a segunda parte. A mistura das duas constitui a ação de uma fração como multiplicador. Observe-se novamente a Figura 27: os cálculos 4×6 e 6×4 aparecem diferentemente nos exemplos das abelhas e dos sapos para mostrar 4 como multiplicador e 6 como multiplicador. No caso das frações, é exatamente igual. Podemos ter $3 \times \frac{1}{2}$ bolo (3 cópias de metade de um bolo) ou $\frac{1}{2} \times 3$ bolos (metade de uma quantidade de três bolos). Em ambos os casos, o resultado é três meios de bolo, mas as imagens são diferentes, como é ilustrado na Figura 30.

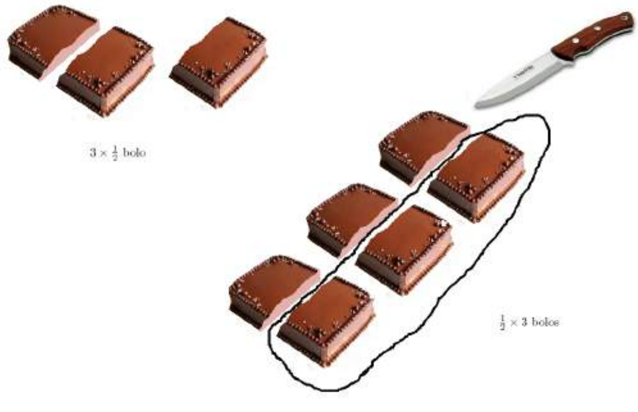


Figura 30: Fração como multiplicando VS fração como multiplicador.

Para proporcionar um entendimento conceptual da multiplicação de frações, aconselhamos a abordagem do *Singapore Math* que, basicamente, divide o assunto em três casos, tratando os dois primeiros no 1.° ciclo e o terceiro no 2.° ciclo. Estes casos podem ser compreendidos a dois níveis (o ideal é alcançar ambos): *procedimental*, que consiste em saber fazer (saber executar) e *conceptual*, que consiste em saber profundamente o que se faz (explicar o motivo porque se faz assim). É curioso constatar que, ao nível procedimental, a multiplicação de frações é mais fácil do que a adição e subtração mas, ao nível conceptual, é o contrário.

Caso 1: número natural × fração
número natural como multiplicador e fração como multiplicando

Este é claramente o caso mais fácil. Corresponde a situações como $4\times\frac{2}{3}$ bolo ou, por extenso, o "quádruplo de dois terços de bolo". Repare o leitor que se a expressão fosse o "quádruplo de dois coelhos" ou o "quádruplo de dois berlindes", as respostas automáticas seriam "oito coelhos" ou "oito berlindes". É claro que no caso de o "quádruplo de dois terços de bolo" a resposta também é natural e é "8 terços de bolo". Aliás, outro exemplo do mesmo tipo pode ser analisado do lado esquerdo da Figura 30. A razão de ser o caso mais fácil consiste no facto de o denominador indicar apenas a unidade (terços de bolo) e o resto da tarefa ser quantitativa, correspondendo simplesmente à multiplicação aditiva de números naturais (4×2). É claro que $n\times\frac{a}{b}\circledast$ resulta em $\frac{n\times a}{b}\circledast$, uma vez que se trata de $n\times a$ unidades em que a unidade é a b-ésima parte de $\circledast$. O que quer que seja $\circledast$ (e.g., bolos, coelhos, naves espaciais), basta efetuar $\frac{n\times a}{b}$. É interessantíssimo verificar que muitas pessoas adultas transformam um cálculo como $3\times\frac{2}{5}$ em $\frac{3}{1}\times\frac{2}{5}$. Isso é um sintoma revelador de que algo já está a correr mal; significa que a pessoa aprendeu um procedimento e já está a perder a visão conceptual do assunto.

Caso 2: fração × número natural
fração como multiplicador e número natural como multiplicando

Este caso já pede uma análise mais cuidada. Imagine que quatro irmãos recebem de herança três sacos, cada um com 20 diamantes. Para dividirem igualmente a riqueza entre si, dá jeito operar $\frac{3}{4}\times 20$ diamantes. A conta $\frac{3}{4}\times 20$ é a que se adapta à situação e pode ser pensada em *dois passos*: a quarta parte de cada saco corresponde a 5 diamantes. Como há 3 sacos, cada irmão deverá receber 3×5 diamantes= 15 diamantes. Este pensamento aponta para o procedimento seguinte:

$$\frac{3}{4}\times 20 \text{ diamantes} = 3\times \text{ a quarta parte de vinte diamantes} =$$
$$= 3\times\frac{20}{4} \text{ diamantes} = 3\times 5 \text{ diamantes} = 15 \text{ diamantes.}$$

Acontece que há uma segunda forma de resolver este problema. Os irmãos podem abrir primeiro os sacos e juntar tudo, ou seja, o total da riqueza é de 3×20 diamantes = 60 diamantes. Em seguida, tiram o seu quinhão, ou seja, a terça parte de 60 diamantes. Este segundo pensamento aponta para o procedimento seguinte:

$$\frac{3}{4}\times 20 \text{ diamantes} = \text{a quarta parte do triplo de vinte diamantes} =$$
$$= \frac{1}{4}\times 3\times 20 \text{ diamantes} = \frac{1}{4}\times 60 \text{ diamantes} = 15 \text{ diamantes.}$$

Basicamente, o que estamos a dizer é que tanto faz efetuar $3 \times \frac{20}{4}$ como $\frac{3\times20}{4}$. Mais uma vez, parece um pequeno pormenor, mas é um detalhe importante, com reflexo na análise das imagens e na compreensão dos exemplos. A Figura 31 mostra um exemplo retirado dos manuais do *Singapore Math*, ilustrando o primeiro método. A Figura 32 ilustra o segundo método. A exploração destes casos é tratada no 4.° ano de escolaridade.

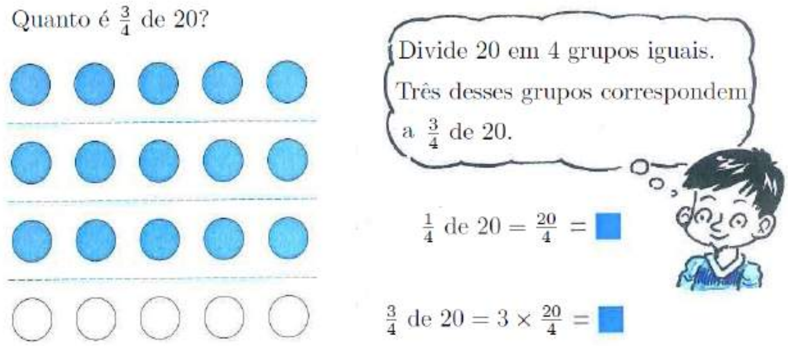


Figura 31: Fração × número natural: primeiro método.

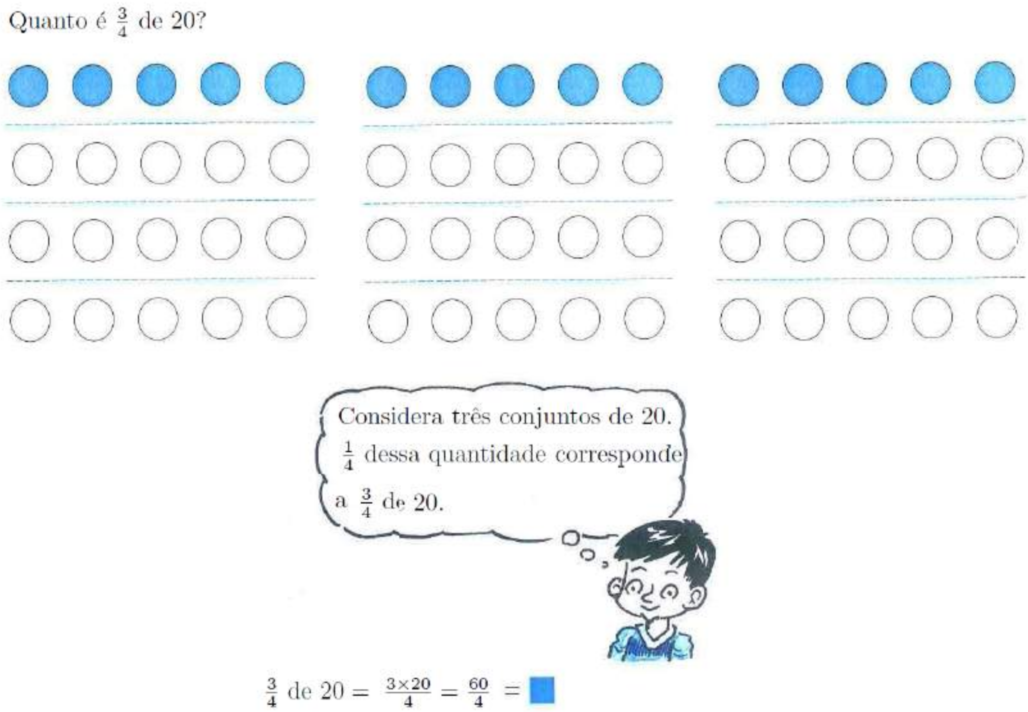


Figura 32: Fração × número natural: segundo método.

Caso 3: fração $\times$ fração

Para abordar o caso geral, é importante responder primeiro a uma pergunta do género "Quanto é um terço de um quinto de bolo?". Ou seja, "Como interpretar o cálculo $\frac{1}{n} \times \frac{1}{m}$?". Considere-se a Figura 33. Em cima, vemos $\frac{1}{5}$ de bolo, uma fatia cortada na vertical. Em baixo, vemos o bolo cortado na horizontal em três partes iguais. Naturalmente, o quadradinho vermelho é um terço de um quinto de bolo. Mas que parte é essa? A resposta é simples! Pelo raciocínio multiplicativo que vimos anteriormente, associado à Figura 29, esse quadradinho vermelho é *uma de* 3×5 *partes iguais que constituem o bolo*. Sendo assim, um terço de um quinto de bolo é um quinze avos de bolo, ou seja, $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$. Em geral, $\frac{1}{n} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{n \times m}$.

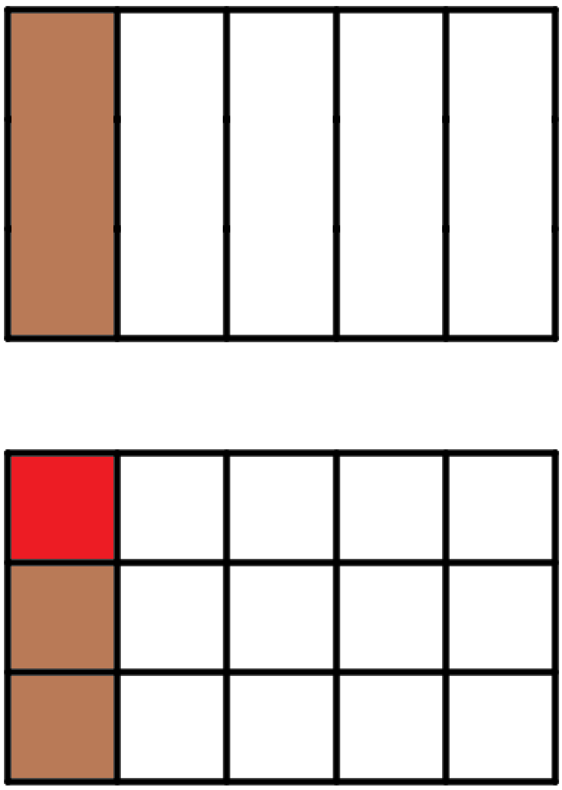


Figura 33: Um terço de um quinto de bolo.

Compreendido este esquema, o caso geral da multiplicação de frações pode ser finalmente interpretado. A Figura 34 constitui uma ilustração dinâmica.

Figura 34: Calcular $\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$: uma ilustração dinâmica.

Na Figura 35, retirada de um manual do 5.° ano do *Singapore Math*, ano onde se trata o caso geral, utiliza-se uma tesoura como metáfora para o papel da fração como multiplicador.

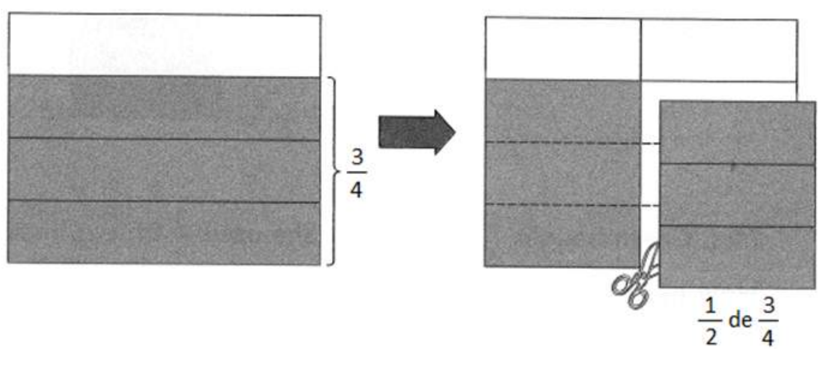


Figura 35: Um meio de três quartos de um retângulo.

6 Medir e repartir. Noção de inverso e divisão de frações

Em [13], no âmbito de um estudo comparativo sino-americano, Liping Ma colocou algumas questões a professores dos primeiros anos. Uma delas foi a seguinte:

Imagine que está a ensinar a divisão de fracções. Para que isto tenha algum significado para as crianças, muitos professores tentam mostrar as aplicações da matemática. Por vezes tentam arranjar situações da vida real ou histórias-problema para mostrar a aplicação de um conteúdo particular. Qual seria uma boa história ou um bom modelo para $\frac{7}{4} \div \frac{1}{2}$?

Esta interessante questão originou um pobre desempenho dos professores americanos, apontando para uma certa incompreensão sobre as aplicações das operações. Para melhor compreender o que se passa com a questão, olhemos novamente para uma representação da multiplicação no sentido aditivo (36).

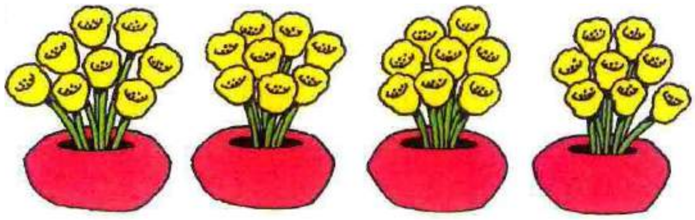


Figura 36: Vasos de flores.

Querendo formular uma questão sobre a multiplicação, é com naturalidade que surge "Tenho 8 flores em cada um dos 4 vasos. Quantas flores tenho no total?". Trata-se de flores e a questão é traduzida por 4×8 flores $= ?$. Quatro é o multiplicador (número de repetições) e oito o multiplicando (um grupo de oito flores). A resposta é "32 *flores*".

Querendo formular questões sobre a divisão, há *duas* hipóteses distintas:

(a) Pode *omitir-se o multiplicando*, perguntando sobre ele. Esse é o cenário da *divisão para repartir* (*divisão por partilha equitativa*) e uma questão natural é "Quero repartir igualmente 32 flores por 4 vasos. Quantas flores devo colocar em cada vaso?". Ora, esta questão parte da igualdade $4 \times ?$ flores $= 32$ flores e é traduzida pela divisão 32 flores $\div\ 4 = ?$. A resposta é 8 *flores*; a natureza, que são as *flores*, aparece na resposta e a pergunta-chave é "Quanto calha a cada um?".

(b) Pode *omitir-se o multiplicador*, perguntando sobre ele. Esse é o cenário da *divisão para medir* (*divisão por agrupamento*) e uma questão natural é "Com um total de 32 flores, quero fazer vasos com 8 flores. Quantos vasos consigo fazer?". A questão parte da igualdade $? \times 8$ flores $= 32$ flores e é agora traduzida pela divisão 32 flores $\div$ 8 flores $= ?$. A resposta é 4; a natureza, que são as flores, não aparece na resposta (não faz sentido algum responder 4 flores) e a pergunta-chave é "Quantas vezes cabe?". Trata-se efetivamente de uma medição; utilizando 8 flores como unidade, o que se está a fazer é medir um total de 32 flores, tendo em conta essa unidade; 32 flores correspondem a 4 unidades. Nesta aplicação concreta, faz sentido escrever $\frac{32 \text{ flores}}{8 \text{ flores}}$, indicando que se pretende saber quantas vezes um grupo de 8 flores cabe num grupo de 32 flores. Na medição, tal como nas adições e subtrações, a mesma natureza é vital: medimos comprimentos com comprimentos, áreas com áreas, etc. A resposta é um *número puro*[2].

Repartir	**Medir**
Pretende-se descobrir o multiplicando	Pretende-se descobrir o multiplicador
O resultado exprime-se na natureza dos objetos apresentados no problema (e.g., flores, maçãs, joaninhas, ...).	O resultado é um número puro.
Questão típica: "Quanto calha a cada um?"	Questão típica: "Quantas vezes cabe?"

A situação de multiplicação no sentido aditivo origina duas situações de divisão, conforme o objetivo seja a determinação do multiplicando ou do multiplicador. Naturalmente, esta ideia é vital para uma boa compreensão das divisões que envolvem frações.

Divisão para repartir no contexto das frações: noção de inverso

Estamos habituados a dividir riquezas por muitas pessoas. São comuns problemas como "Cada conjunto de três pessoas recebe 24 euros. Admitindo uma divisão equitativa, quanto recebe cada pessoa?". No entanto, para as crianças (e mesmo para os adultos!), problemas como "Cada *metade de pessoa* recebe 24 euros. Quanto recebe cada pessoa?" já trazem mistério e estupefação. Mas é uma abordagem *legítima*; a Figura 37 ilustra a ideia.

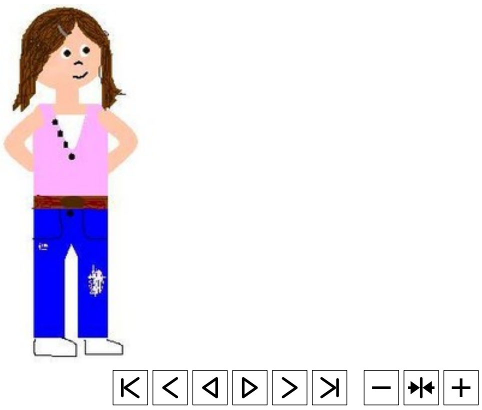


Figura 37: Calcular $24 \div \frac{1}{2}$: uma ilustração dinâmica.

Uma vez que cada pessoa tem duas metades e cada metade recebe 24 euros, a resposta à questão é 48 euros. O cálculo 24 euros $\div \frac{1}{2}$ é transformado na mul-

[2] Um físico cortaria alegremente a palavra "flores" do numerador com a palavra "flores" do denominador, indicando o resultado 4 na sua forma pura. Trata-se de uma mnemónica operatória que se ajusta à ideia de medição e à pergunta "Quantas vezes cabe?".

tiplicação 2×24 euros. Isto porque $\frac{1}{2}$ cabe 2 vezes numa unidade. É isto o *inverso multiplicativo de um número*: o número de vezes que esse número cabe numa unidade. O inverso de $\frac{1}{2}$ é 2.

É fácil explicar que o inverso de $\frac{1}{2}$ é 2, o inverso de $\frac{1}{10}$ é 10 e, assim, sucessivamente. Mas como pensar no inverso de uma fração como $\frac{2}{3}$ ou, em geral, $\frac{n}{m}$? Nesses casos, a explicação tem de ser cuidada e estrutura-se da seguinte forma:

- $\frac{2}{3}$ pode ser pensado como a *terça parte de duas unidades.*
- $\frac{2}{3}$ *cabe três vezes em duas unidades.*
- Logo, $\frac{2}{3}$ *cabe* $\frac{3}{2}$ *de vezes numa unidade.*
- O inverso de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$!

Exatamente da mesma forma, podemos argumentar que o inverso de $\frac{n}{m}$ é $\frac{m}{n}$. A compreensão desta mensagem é muito delicada quando se trata de um aluno do 2.° ciclo. Tem de haver uma esmerada representação da ideia e, mesmo assim, muitos não a perceberão totalmente com essa idade. A Figura 38 é uma obra de arte de esquematização deste conceito matemático.

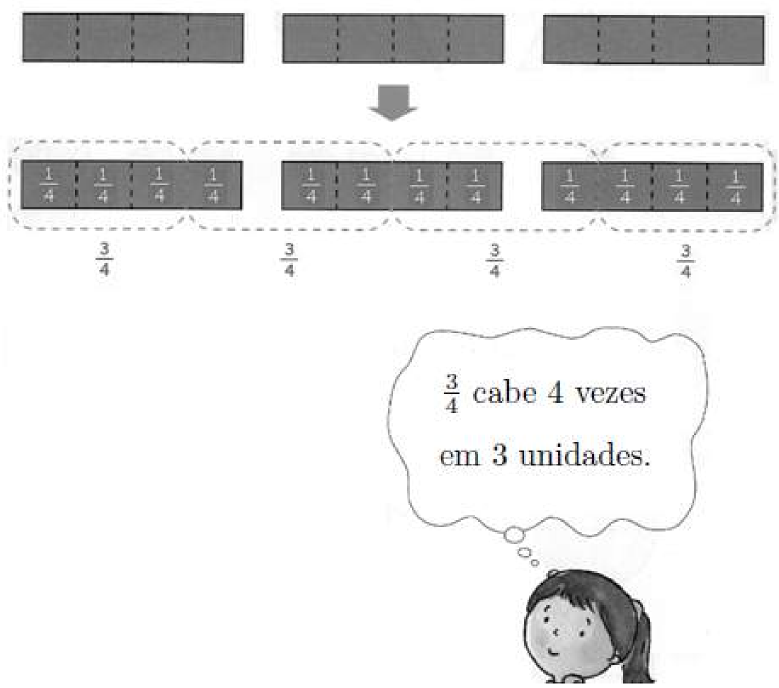


Figura 38: Noção de inverso.

Sendo assim, a divisão pode ser simplesmente transformada numa multiplicação através do conceito de inverso.

Dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso.

$$\tfrac{a}{b} \div \tfrac{c}{d} = \tfrac{d}{c} \times \tfrac{a}{b} = \tfrac{a}{b} \times \tfrac{d}{c}$$

No estudo de Liping Ma, há respostas de professores chineses que são exemplos didáticos de grande qualidade. Eles frisam os conceitos através de *frases simples e certeiras*. Tal como ligámos as operações inversas, 32 flores $\div$ 4 = ? flores e 4 $\times$? flores = 32 flores, podemos e devemos fazer o mesmo no caso das frações:

> "Pretende-se encontrar um número tal que metade dele seja $\frac{7}{4}$, ou seja, dividir por uma fração é encontrar um número, quando uma parte fracionária dele é conhecida."
>
> "Metade de uma corda de saltar mede $\frac{7}{4}$ de metro, qual é o comprimento da corda?"
>
> "Um comboio demora uma hora e três quartos a fazer metade de um percurso. Quanto tempo demora o comboio a fazer o percurso completo?"
>
> "Pagando $\frac{7}{4}$ *Yuan* para comprar $\frac{1}{2}$ de bolo, quanto custa o bolo inteiro?"

Outros professores apontam duas propriedades simples, mas não evidentes para todas as pessoas. A primeira delas é seguinte:

$$(N \div a) \div b = (N \div b) \div a.$$

Trata-se mais uma vez de uma consequência da propriedade comutativa da multiplicação, ilustrada com o exemplo dos cortes no bolo. Tanto faz fazer primeiro a cortes na vertical e em segundo lugar b cortes na horizontal, como fazer primeiro b cortes na horizontal e em segundo lugar a cortes na vertical. O quadradinho a comer no fim será $\frac{1}{ab}$ de bolo em ambos os casos. A segunda propriedade a realçar é a seguinte:

$$N \div (a \div b) = (N \div a) \times b.$$

Esta propriedade decorre de uma ideia semelhante à exposta relativamente à noção de inverso. Se tivermos 24 $\div$ 4, naturalmente que a resposta é 6. No entanto, se tivermos 24 $\div$ 4 *terços*, uma vez que há três terços em cada unidade, o resultado é agora 6×3. Com estas duas propriedades, podemos apreciar uma notável resposta de um professor chinês [13].

O Prof. Xie foi o primeiro professor que eu conheci que descreveu um método pouco comum de efetuar a divisão por fracções *sem usar a multiplicação*. Disse-lhe que nunca tinha pensado nisso e pedi-lhe que explicasse como funcionava. Ele disse que era fácil:

$$\begin{aligned}
\frac{7}{4} \div \frac{1}{2} &= && (1)\\
(7 \div 4) \div (1 \div 2) &= && (2)\\
((7 \div 4) \div 1) \times 2 &= && (\textit{Segunda propriedade}) \quad (3)\\
((7 \div 1) \div 4) \times 2 &= && (\textit{Primeira propriedade}) \quad (4)\\
(7 \div 1) \div (4 \div 2) &= && (\textit{Segunda propriedade}) \quad (5)\\
\frac{7 \div 1}{4 \div 2} & && (6)
\end{aligned}$$

Notavelmente, o que este professor explicou é que se pode efetuar diretamente a divisão:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}.$$

Contudo, o professor observou que esta abordagem apenas é indicada nos cálculos em que quer o numerador como o denominador do dividendo são divisíveis respetivamente pelo numerador e pelo denominador do divisor.

DIVISÃO PARA MEDIR NO CONTEXTO DAS FRAÇÕES

A divisão de frações pode também ser pensada no sentido da medição. Pensemos no cálculo $\frac{5}{2} \div \frac{3}{5}$, concretizando-o numa situação envolvendo dinheiro. Imagine que tem sacos com 3 moedas de 20 cêntimos ($\frac{3}{5}$ de euro) e que quer saber a quantidade de sacos necessária para obter uma quantia correspondente a 5 moedas de 50 cêntimos ($\frac{5}{2}$ de euro). Na prática estamos a medir; queremos saber *quantas vezes* $\frac{3}{5}$ *cabe em* $\frac{5}{2}$.

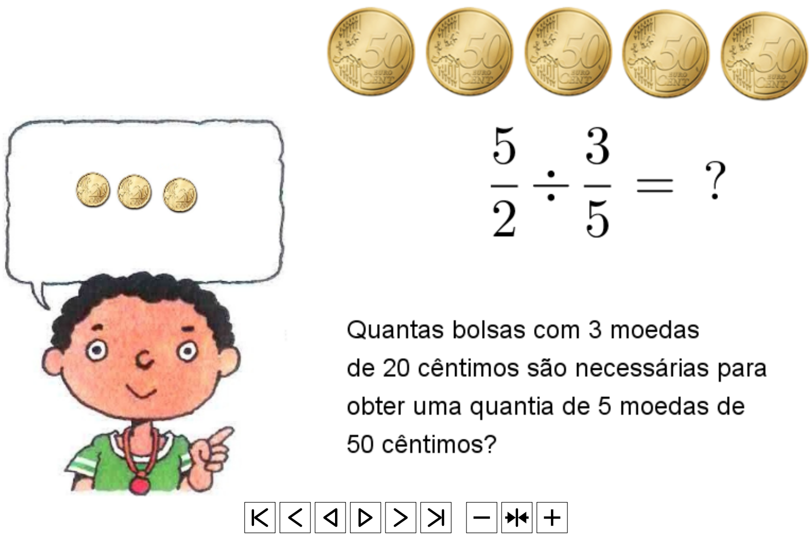


Figura 39: Calcular $\frac{5}{2} \div \frac{3}{5}$: uma ilustração dinâmica.

Se utilizarmos *uma mesma natureza*, isto é, *se encontrarmos um denominador comum* (no caso de dinheiro, um troco comum), a comparação é possível. E, feito isso, *não é preciso pensar nessa natureza* – repare-se que as questões "quantos sacos de dois bolos são necessários para ter seis bolos?" ou "quantos sacos de dois berlindes são necessários para ter seis berlindes?" têm a mesma resposta, três. Não interessa a natureza, o que interessa é *que seja a mesma*. Sendo assim,

$\frac{5}{2}$ de euro são 25 moedas de 10 cêntimos ($\frac{5}{2} = \frac{25}{10}$);

$\frac{3}{5}$ de euro são 6 moedas de 10 cêntimos ($\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$);

25 décimos a dividir por 6 décimos resulta em $\frac{25}{6}$;

São precisos quatro sacos mais um sexto de um quinto saco.

Encarando a divisão no sentido da medição, a determinação do mesmo denominador é natural e isso constitui mais uma forma de explicar a regra operatória:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} \underbrace{=}_{\text{a mesma natureza é irrelevante}} \frac{ad}{bc}.$$

Também no sentido da medição, podemos ter ótimas respostas à questão de Liping Ma:

> "Se uma equipa de trabalhadores construir $\frac{1}{2}$ km de estrada por dia, quantos dias levarão para construir uma estrada com $\frac{7}{4}$ km de comprimento?"
>
> "Comprei $\frac{7}{4}$ kg de açúcar. Quero colocar esse açúcar em sacos de $\frac{1}{2}$ kg. Quantos sacos são precisos?"

Referências

[1] Aharoni, R. *Aritmética para Pais*, Gradiva, 2008.

[2] Atractor. `www.atractor.pt`

[3] Ball, D. "Halves, pieces and twoths: constructing and using representational contexts in teaching fractions", In Carpenter, T., Fennema, E., Romberg, T. (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 157–196), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, 1993.

[4] Bruce, C., Chang, D., Flynn, T. *Foundations to Learning and Teaching Fractions: Addition and Subtraction*, EduGAINS, Ontario Ministry of Education, 2013. `www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/LNSAttentionFractions.pdf`

[5] Bruner, J. *The process of education*, Harvard University Press, 1960.

[6] Fractions and their uses. `http://hiawatharoom430.weebly.com/puzzling-unit-7.html`

[7] Hong, K. *Primary mathematics Textbook 1B*, American Edition: Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education of Singapore, Times Media Private Limited, 1981.

[8] Hong, K. *Primary mathematics Textbook 2B*, American Edition: Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education of Singapore, Times Media Private Limited, 1981.

[9] Hong, K. *Primary mathematics Textbook 3B*, American Edition: Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education of Singapore, Times Media Private Limited, 1981.

[10] Hong, K. *Primary mathematics Textbook 4A*, American Edition: Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education of Singapore, Times Media Private Limited, 1981.

[11] How to teach your child numbers arithmetic mathematics. http://www.abelard.org/sums/teaching_number_arithmetic_mathematics_fractions_decimals_percentages1.php

[12] Learning about fractions with lego. http://www.andnextcomesl.com/2014/10/learning-about-fractions-with-lego.html

[13] Ma, L. *Saber e Ensinar Matemática Elementar*, Gradiva, 2009.

[14] Sousa, D. *How the brain learns Mathematics*, 2nd edition, Corwin, 2015.

[15] Streefland, L. *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*, Mathematics Education Library, 1991.

[16] The simplest way to explain math to kids. https://www.facebook.com/brightside/videos/801672809961464

[17] Top Drawer Teachers. http://topdrawer.aamt.edu.au/Fractions

[18] Wong, M., Evans, D. *Assessing Students' Understanding of Fraction Equivalence*, The Australian Association of Mathematics Teachers (AAMT) Inc., 2011.

[19] Wu, H. Vários artigos e notas curriculares sobre o ensino das frações, disponíveis em https://math.berkeley.edu/~wu

Vária

O Sentido de Divisão: Uma Experiência com Alunos do 6.° ano de escolaridade

Cristiana Pereira, Alexandra Gomes
CIEC/IE, Universidade do Minho
pg25521@alunos.uminho.pt, magomes@ie.uminho.pt

Resumo: *O presente artigo resulta da conceção, desenvolvimento e avaliação de um projeto de intervenção pedagógica supervisionada e centra-se em duas intervenções numa turma de 6.° ano de escolaridade. Com efeito, objetivou-se desenvolver o sentido de divisão nos alunos da mesma e, tendo por base uma metodologia de investigação de caráter qualitativo, procurou-se responder à questão de investigação: Onde se situam as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de problemas que envolvem a divisão em contextos de partilha e de medida?. Os resultados obtidos indiciaram que os alunos sentem efetivamente dificuldades na resolução de problemas que envolvem a divisão em contextos de partilha e de medida, sobretudo na realização de divisões por métodos formais e na verificação dos dados e resultados.*

Palavras-chave: sentido de divisão; divisão como partilha; divisão como medida; 6.° ano de escolaridade.

1 O sentido de divisão

De acordo com Huinker, "the need to develop number sense is well documented and its characteristics have received extensive analysis, but the need to develop operation sense has not received the same attention or scrutiny" ([4], p. 72). Posto isto, com o intuito de caracterizar o sentido de operação, a autora apresenta sete dimensões inerentes ao desenvolvimento do mesmo, as quais se apresentam seguidamente: (i) compreensão do significado de operação; (ii) capacidade para reconhecer e descrever situações de vida real para as várias operações; (iii) dar significado aos símbolos e à linguagem matemática formal; (iv) capacidade para mudar facilmente de um modo de representação para outro; (v) compreender as relações entre as operações; (vi) capacidade para compor e decompor números e usar as propriedades das operações; e (vii) raciocinar sobre os efeitos das operações nos números.

Segundo Mendes, a aprendizagem da operação divisão é com frequência associada a dificuldades por parte dos alunos. De facto,

> os próprios professores dos 1.° e 2.° ciclos referem-se a esta operação como a mais difícil de ensinar aos seus alunos. Além disso, a sua aprendizagem é, muitas vezes, confundida com a mecanização das regras associadas ao algoritmo, não deixando espaço, na sala de aula, para o desenvolvimento de um trabalho com os alunos em torno da compreensão desta operação. (...) a aprendizagem da divisão é muito mais do que saber usar o algoritmo tradicional, significa [também] reconhecer esta operação em diferentes situações ([6], p. 6).

Efetivamente, Brocardo, Serrazina, e Kraemer consideram que a tradição curricular do nosso país é pautada pelo foco nos algoritmos [3]. Infelizmente persiste ainda "a ideia de que ensinar a divisão é ensinar a realizar o algoritmo da divisão" ([9], p. 201).

Em particular, Pinto e Monteiro referem que frequentemente surgem dificuldades aquando da divisão de números racionais representados por frações. Estas autoras constatam que "a aprendizagem da divisão de números racionais representados por fracções passa pela enfatização do algoritmo *inverter o divisor e multiplicar*" e afirmam que "o problema não está no facto de se ensinar este algoritmo, mas na forma como se ensina e quando" ([9], p. 201). Como Pinto e Monteiro alertam

> quando crianças de 11/12 anos são ensinadas a multiplicar "a primeira fracção pelo inverso da segunda", não entendem porque, se estão a dividir, têm de multiplicar. Um dos erros típicos consiste na inversão do dividendo, o que indicia uma completa incompreensão do que estão a fazer ([9], p. 201).

Tendo em consideração o suprarreferido, importa refletir acerca do desenvolvimento do próprio conceito. Acredita-se que trabalhar neste sentido permite aos alunos saber quando recorrer à divisão para resolver um dado problema e caminhar no sentido de compreender os procedimentos relativos aos algoritmos [9].

De facto, estudos disponíveis sobre esta problemática indicam-nos que cada operação tem mais do que uma interpretação. De acordo com Martins, as várias interpretações "têm implicações na forma como os alunos adquirem o sentido de cada operação, pois é necessário conhecer uma multiplicidade de significados, alguns dos quais pouco intuitivos" ([5], p. 4). Especificamente no que se refere à compreensão da operação divisão, Mendes assevera que esta se desenvolve "através do estabelecimento de relações entre contextos de divisão por medida e por partilha, de modo que seja possível comparar os procedimentos construídos pelos alunos num caso e noutro" ([6], p. 8).

Não obstante, o Programa de Matemática para o Ensino Básico, no que concerne ao domínio números e operações e ao conteúdo "números racionais não negativos", menciona que os alunos do 5.° ano de escolaridade deverão adquirir a "divisão de números racionais não negativos representados na forma de fração" ([7], p. 15).

Nas páginas iniciais do referido documento pode ler-se que os desempenhos que os alunos em cada um dos três ciclos da escolaridade básica deverão evidenciar devem concorrer, de forma integrada, para a aquisição de conhecimentos de factos e de procedimentos, a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático, uma comunicação adequada à matemática, a resolução de problemas em diversos contextos e uma visão da matemática como um todo articulado e coerente [7]. Como se sabe, estas são ideias-chave na educação matemática. Porém, a forma como se propõem concretizar é claramente insensata. Por exemplo, no que concerne à resolução de problemas, destaca-se que esta envolve, por parte dos alunos,

> a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais ([7], p. 5).

O National Council of Teachers of Mathematics, por seu turno, relativamente à resolução de problemas, enfatiza que esta, para além de constituir um objeto da aprendizagem matemática, "é também um importante meio pelo qual os alunos aprendem matemática. Os alunos deverão ter muitas oportunidades para formular, discutir e resolver problemas (...) e, em seguida, deverão ser encorajados a reflectir sobre os seus raciocínios" ([8], p. 57). A este propósito, respostas à questão "Alguém resolveu o problema de outra maneira?" ajudam "ao desenvolvimento da linguagem comum e das representações e contribui para que os outros alunos compreendam o trabalho desenvolvido pelo primeiro" ([8], p. 59).

Tendo em consideração os aspetos anteriormente referidos relativos aos números e operações e à resolução de problemas, urge referir que compete ao professor encorajar os alunos, regularmente, "a mostrar e a aprofundar os seus conhecimentos dos números e das operações, através da resolução de problemas contextualizados interessantes e da discussão das representações e das estratégias utilizadas" ([8], p. 91). Brocardo e Serrazina consideram que os problemas são de facto basilares na aprendizagem dos números e operações [2].

Realce-se, ainda, que no Programa de Matemática para o Ensino Básico não há referência à representação e ao seu papel no estudo da matemática [7], o que contraria notoriamente "o que se tem investigado sobre o valor de uma experiência matemática rica e significativa desde os primeiros anos de escolaridade" ([12], p. 8). Relembre-se, a este propósito, um dos objetivos gerais elencados no programa revogado: "os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações (...) devem conhecer e compreender os diferentes tipos de representações, ser capazes de as utilizar em diferentes situações e de seleccionar a representação mais adequada à situação" ([10], pp. 4-5).

Neste momento, importa referenciar a pertinência da representação no estudo da matemática por desempenhar dois papéis fundamentais: é uma ferramenta de raciocínio e é um instrumento de comunicação ([8], p. 75). Neste sentido, o professor que auxilia os alunos na seleção e organização das representações que evidenciem os seus raciocínios e que ouve atentamente as suas ideias "poderá ajudá-los a desenvolverem a predisposição e a capacidade para modelar problemas eficazmente, para clarificar o seu próprio entendimento de um problema e para utilizar as representações para comunicar eficazmente com os outros" ([8], p. 244).

2 Uma experiência com alunos do 6.° ano de escolaridade

O presente artigo resulta da conceção, desenvolvimento e avaliação de um projeto de intervenção pedagógica supervisionada, concretizado no âmbito da unidade curricular Prática de Ensino Supervisionada, incluída no plano de estudos do Mestrado em Ensino do 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico da Universidade do Minho. Este decorreu, num primeiro momento, no 1.° ciclo do ensino básico, numa turma de 4.° ano de escolaridade e, num segundo momento, no 2.° ciclo do ensino básico, especificamente numa turma de 6.° ano de escolaridade.

O estudo que aqui se apresenta tem enfoque na 1.ª e 2.ª intervenções na turma de 6.° ano de escolaridade (no total foram desenvolvidas três intervenções), presenciadas por 14 alunos, com idades compreendidas entre os 11 e os 14 anos, sendo 5 do sexo masculino e 9 do sexo feminino. De assinalar que estes alunos são identificados por números, por forma a manter o anonimato.

O projeto de intervenção pedagógica supervisionada, centrado no domínio números e operações, consubstanciou-se no desenvolvimento do sentido de operação, especificamente de divisão, nos alunos da turma suprarreferida. Concomitantemente, substancializou-se na procura da resposta à questão de investigação: 1. Onde se situam as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de problemas que envolvem a divisão em contextos de partilha e de medida?. Para tal, procurou-se responder às subquestões enunciadas: 1.1 Situam-se na identificação do problema como envolvendo uma situação de divisão?; 1.2 Situam-se na realização da divisão por métodos formais?; e 1.3 Situam-se na verificação dos dados e resultados?. Assim, no decorrer da 1.ª e 2.ª intervenções, que perfizeram individualmente 90 minutos, procurou-se coadunar os objetivos pedagógicos, as atividades desenvolvidas e os objetivos investigativos. A 1.ª intervenção objetivava, fundamentalmente, desenvolver o sentido de divisão em contexto de partilha, enquanto a 2ª intervenção tinha por objetivo essencial desenvolver o sentido de divisão em contexto de medida. Para isso, foram elaborados dois problemas, um para cada sessão, através da exploração dos quais se procurava promover o reconhecimento da divisão em contexto de partilha/medida; potenciar a realização e compreensão de divisões de números racionais positivos representados na forma de fração por métodos formais e informais; e estimular a verificação dos dados e resultados. Simultaneamente, com estas intervenções procurava-se perceber onde se situavam as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de problemas que envolvem a divisão como partilha/medida, no sentido de dar resposta à questão e subquestões de investigação.

No que concerne à metodologia de investigação adotada no âmbito do estudo, importa referir que esta assumiu um caráter qualitativo. Os dados foram obtidos por formas variadas, nomeadamente através de: documentos construídos pelos alunos, registos audiovisuais (de cada intervenção), observações e anotações escritas pelo investigador. Estes elementos formaram a "base da análise" ([1], p. 149), apresentando-se, concomitantemente, como provas e pistas [1].

1.ª Intervenção - Divisão como partilha

Como referido anteriormente, a 1.ª intervenção objetivava, fundamentalmente, desenvolver o sentido de divisão em contexto de partilha. Para isso, foi elaborado o seguinte problema (Problema 1):

A Elisa pediu à mãe chocolate para oferecer a alguns amigos. A mãe deu-lhe $\frac{1}{2}$ de um chocolate e disse-lhe que deveria oferecer a cada amigo a mesma quantidade de chocolate. Se a Elisa oferecer chocolate a 4 amigos, que parte de um chocolate a Elisa vai oferecer a cada amigo?

Iniciou-se a intervenção com a distribuição, por cada um dos alunos, da Tarefa 1, para que pudesse ser concretizada individualmente. Esta consistia em assinalar, de entre as seguintes, a opção que representa o Problema 1:

$$\frac{1}{2} \div 4,\ \frac{1}{2} \times 4,\ 4 \div \frac{1}{2}\ e\ 4 \div 2.$$

Finda a concretização da Tarefa 1 por cada um dos alunos, promoveu-se um momento de discussão acerca da mesma.

De um modo geral, os alunos demonstraram facilidades na concretização desta tarefa. De acordo com Pinto e Monteiro, situações problemáticas como a apresentada, isto é, "situações onde se pretende determinar o tamanho de cada grupo, ou seja, o valor que cabe a cada um dos elementos do divisor" ([9], p. 208), são as que os alunos identificam, primeiramente, como problemas de divisão. Porém, dois alunos (8 e 9) assinalaram uma expressão numérica que não representa a situação descrita.

Solicitou-se ao aluno 8 que registasse no quadro a sua resolução e que procurasse expor os seus raciocínios. Este assinalou a expressão numérica $\frac{1}{2} \times 4$. A Transcrição 1 procura ilustrar a resolução do aluno 8:

Aluno 8 - Eu escolhi esta porque supostamente "de" é vezes e então deve ser $\frac{1}{2}$ *vezes* 4.

Transcrição 1. Explicação da resolução de um aluno (8) na Tarefa 1 (Problema 1).

O aluno 9, analogamente, assinalou a expressão numérica $\frac{1}{2} \times 4$. A Transcrição 2 procura ilustrar a sua justificação:

Aluno 9 - A mim pareceu-me que ela ia dar $\frac{1}{2}$ *aos* 4 *amigos. A cada um dos* 4 *amigos.*

Transcrição 2. Explicação da resolução de um aluno (9) na Tarefa 1 (Problema 1).

A justificação destes erros parece correlacionar-se com dificuldades concetuais e de interpretação, respetivamente. A incorreção cometida pelo primeiro aluno (8), especificamente, parece ocasionada por aprendizagens anteriores que, por vezes, como referem Pinto e Monteiro, "se tornam obstáculos à apropriação de novos conhecimentos" ([9], pp. 214-215).

Em decurso, procurou-se estimular a reflexão e argumentação das concetualizações da turma. Para isso, realizou-se uma sistematização em plenário, tendo sido registadas numa tabela as respostas às questões "O que sabemos?", "O que queremos saber?" e "Como vamos descobrir?" no âmbito do Problema 1. Esta estratégia permitiu à turma identificar e assinalar as incorreções cometidas. Por fim, cada um dos alunos registou a informação sistematizada e a correção da Tarefa 1.

Após este momento, distribuiu-se aos alunos a Tarefa 2, para que pudesse, também, ser realizada individualmente. Nesta, os alunos deviam resolver o problema apresentado.

No final da concretização da Tarefa 2 pela turma, promoveu-se um momento de discussão acerca da mesma. Solicitou-se a um aluno (13) que registasse no quadro a sua resolução e que procurasse expor os seus raciocínios. Este resolveu o problema recorrendo à representação simbólica, contudo calculou incorretamente. A Figura 1 e a Transcrição 3 procuram ilustrar a resolução do aluno 13:

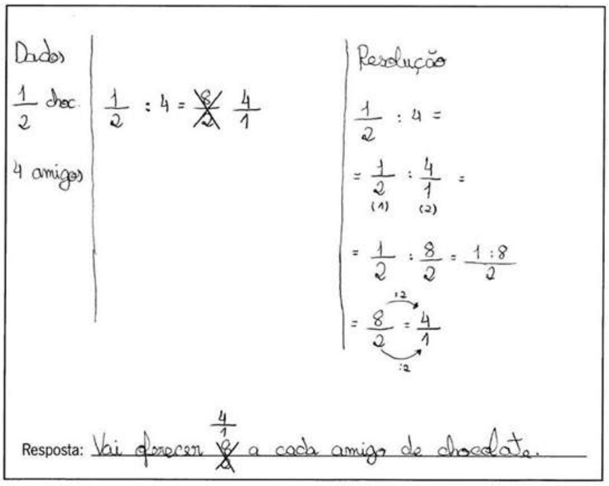


Figura 1: Resolução de um aluno (13) na Tarefa 2 (Problema 1).

Aluno 13 - Eu peguei na metade da tablete de chocolate e comecei a dividir pelos 4 amigos.

Professora - Muito bem, até aqui todos concordamos.

Aluno 13 - Só que eu tinha que arranjar uma fração, então pus o traço e o 1.

Depois tinha que arranjar o mesmo denominador e então eu multipliquei este ($\frac{1}{2}$) *por* 1 *e este* ($\frac{4}{1}$) *por* 2. *Depois quando consegui encontrar o mesmo denominador, dividi os numeradores e deixei o denominador igual porque não se pode mexer nele... Depois quando cheguei à fração, pus na forma irredutível.*

Professora - Dividiste 1 *por* 8 *que deu...*

Aluno 13 - 8. E depois pus na forma irredutível.

Transcrição 3. Explicação da resolução de um aluno (13) na Tarefa 2 (Problema 1).

Posto isto, perguntou-se à turma quem tinha uma resolução e/ou resultado diferente e pediu-se que, tal como o colega, a registasse no quadro e procurasse expor os seus raciocínios.

O aluno 8 também resolveu o problema recorrendo à representação simbólica e calculou incorretamente. A Figura 2 e a Transcrição 4 procuram ilustrar sua resolução:

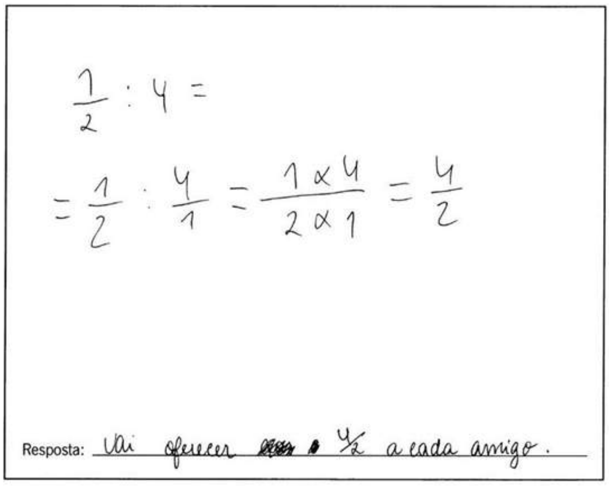


Figura 2: Resolução de um aluno (8) na Tarefa 2 (Problema 1).

Aluno 8 - Eu fiz $\frac{1}{2}$ *a dividir por* 4. *Depois representei* $\frac{1}{2}$ *a dividir por* $\frac{4}{1}$. *Depois fiz traço de fração e o numerador vezes numerador,* 1 *vezes* 4, *e depois fiz denominador vezes denominador,* 2 *vezes* 1. *E deu-me* $\frac{4}{2}$.

Transcrição 4. Explicação da resolução de um aluno (8) na Tarefa 2 (Problema 1).

Refira-se que os alunos 1 e 10 afirmaram ter procedido da mesma forma.

Acentue-se, agora, que oito alunos resolveram a Tarefa 2 recorrendo à representação simbólica do problema, porém quatro alunos (1, 8, 10 e 13) calcularam incorretamente. E, ainda, um aluno (6), apesar de ter procurado resolver o problema recorrendo à sua representação simbólica, não efetuou o cálculo. Por oposição ao preconizado pelo documento Programa de Matemática para o Ensino Básico [7] com relação à destreza na aplicação do algoritmo da divisão de números racionais não negativos por alunos do 2.° CEB, particularmente do 5.° ano de escolaridade, os presentes dados parecem evidenciar que alguns alunos que compõe a turma em estudo revelam dificuldades no cálculo da divisão de números racionais representados por frações. Estes resultados, contudo, são corroborados pelo NCTM [8], que realça o facto de os alunos sentirem, tradicionalmente, muitas dificuldades aquando da divisão destes números, muito embora inverter o divisor e multiplicar pareça ser uma forma simples para o fazer. Efetivamente, o aluno 13 evidenciou ter mobilizado procedimentos utilizáveis aquando da adição e subtração de números racionais representados por frações e os alunos 1, 8 e 10 resolveram a expressão $\frac{1}{2} \div 4$, como se da expressão $\frac{1}{2} \times 4$ se tratasse. Sublinhe-se, por fim, que estes alunos indiciaram sentir, igualmente, dificuldades na verificação dos dados e resultados, uma vez que, como se constatou, revelaram falta de sentido crítico face às soluções.

Findo este momento, o aluno 12, que resolveu o problema recorrendo à representação simbólica do mesmo, tendo realizado o cálculo corretamente e escrito a resposta correta, procurou expor os seus raciocínios. De facto, este mostrou ter multiplicado o dividendo pelo inverso do divisor, o que permitiu à turma identificar e assinalar as incorreções cometidas. Aqui, procurou-se estimular a reflexão e argumentação das concetualizações dos alunos, atendendo-se, também, aos dados e resultados obtidos. Como concluíram, as respostas dos alunos 13, 8, 1 e 10 estavam visivelmente incorretas, atentando no conjunto inicial ($\frac{1}{2}$ de um chocolate) e no número de subconjuntos (4 amigos).

O aluno 9, por sua vez, demonstrou interesse em apresentar a sua resolução, afirmando ter desenvolvido uma estratégia que o conduziu à resposta correta (Figura 3).

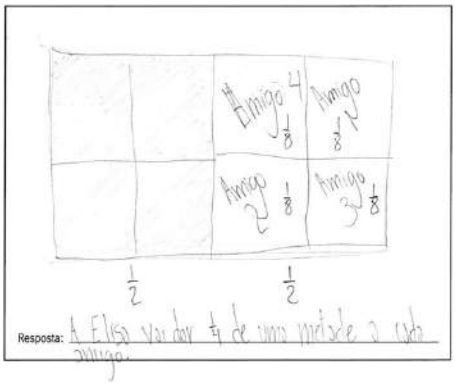


Figura 3: Resolução de um aluno (9) na Tarefa 2 (Problema 1).

Como se pode observar, este aluno resolveu o problema recorrendo à representação pictórica do mesmo. Foi dada particular atenção à sua resolução, a qual despertou a admiração da turma e se revelou similar à dos alunos 3, 5 e 11.

Em decurso, focalizou-se a atenção da turma na resposta do aluno 9 - "A Elisa vai dar $\frac{1}{4}$ de uma metade a cada amigo" - e procurou-se estimular a reflexão e argumentação das suas concetualizações. Enquanto suporte para esta discussão, a representação ativa por cada um dos alunos constitui-se essencial. Como tal, foram distribuídas folhas de papel (tamanho A5) por cada aluno e foi mencionado que cada uma destas representava uma unidade, isto é, um chocolate. Posto isto, pediu-se aos alunos que, aos pares, manipulassem o papel, de modo a resolverem (através de outro modo de representação) o Problema 1.

Denotou-se, de imediato, um envolvimento espontâneo dos alunos nesta atividade, que não gerou quaisquer dúvidas. Efetivamente, com o intuito de saber que parte de uma unidade há em cada subconjunto, os pares começaram por representar o conjunto inicial e, posteriormente, separaram-no no número conhecido de subconjuntos. Os alunos 1 e 4 deslocaram-se ao quadro e apresentaram a sua resolução.

2.ª Intervenção - Divisão como medida

A intervenção agora descrita visava, principalmente, desenvolver o sentido de divisão com o significado de medida. Para isso, foi elaborado um novo problema (Problema 2):

A Elisa pediu à mãe chocolate para oferecer a alguns amigos. A mãe deu-lhe 2 chocolates e disse-lhe que deveria oferecer a cada amigo a mesma quantidade de chocolate. Se a Elisa oferecer $\frac{1}{8}$ de um chocolate a cada amigo, vai oferecer chocolate a quantos amigos?

Tal como na 1ª intervenção, começou-se por distribuir a cada um dos alunos a Tarefa 1, para que pudesse ser concretizada individualmente. Esta consistia em assinalar, de entre as seguintes, a opção que representa o Problema 2:

$$\frac{1}{8} \div 2,\ \frac{1}{8} \times 2,\ 2 \div \frac{1}{8}\ e\ 2 \div 8.$$

Finda a concretização da Tarefa 1 por cada um dos alunos, promoveu-se um momento de discussão acerca da mesma.

Ora, tal como na intervenção anterior, de um modo geral, os alunos demonstraram facilidades na concretização da Tarefa 1. Porém, quatro alunos (13, 2, 3 e 9) não assinalaram a expressão numérica que representa a situação descrita. Assim, solicitou-se ao aluno 13 que registasse no quadro a sua resolução e que procurasse expor os seus raciocínios. Este assinalou a expressão numérica $\frac{1}{8} \times 2$. A Transcrição 5 procura ilustrar a resolução do aluno 13:

Aluno 13 - (depois de reler o problema) Já vi que não está bem. Eu li tudo mal... eu percebi outra coisa, percebi que ela tinha que dar $\frac{1}{8}$ de um chocolate a cada amigo, que eram 2. Então eu pensei que ela tinha que multiplicar $\frac{1}{8}$ de um chocolate pelos 2 amigos. Nem li bem a pergunta.

Transcrição 5. Explicação da resolução de um aluno (13) na Tarefa 1 (Problema 2).

Depois disto, o aluno 13 identificou a expressão que representa a situação descrita ($2 \div \frac{1}{8}$). Sublinhe-se que os alunos 2 e 3, à semelhança do aluno 13, afirmaram ter assinalado a expressão $\frac{1}{8} \times 2$ por não terem lido atentamente o problema.

O aluno 9 também assinalou uma expressão numérica que não representa a situação descrita: $\frac{1}{8} \div 2$. Apesar de ter revelado dificuldades em explanar os seus raciocínios, afirmou que a sua resposta estava claramente errada, referindo que a resposta correta seria $2 \div \frac{1}{8}$.

A justificação destas incorreções parece correlacionar-se com a leitura desatenta do enunciado, uma vez que assim que este foi relido a expressão numérica que representa a situação descrita foi identificada.

Em decurso, procurou-se estimular a reflexão e argumentação das concetualizações da turma. Para isso, realizou-se uma sistematização em plenário, tendo sido registadas numa tabela as respostas às questões "O que sabemos?", "O que queremos saber?" e "Como vamos descobrir?" no âmbito do Problema 2. Por fim, cada um dos alunos registou a informação sistematizada e a correção da Tarefa 1.

Após este momento, os alunos passaram para a Tarefa 2, que pressupunha a resolução do problema apresentado individualmente.

No final da concretização da Tarefa 2 pela turma, promoveu-se um momento de discussão acerca da mesma. Solicitou-se a um aluno (10) que registasse no quadro a sua resolução e que procurasse expor os seus raciocínios. Este resolveu o problema recorrendo à representação simbólica, contudo calculou incorretamente. A Figura 4 e a Transcrição 6 procuram ilustrar a resolução do aluno 10:

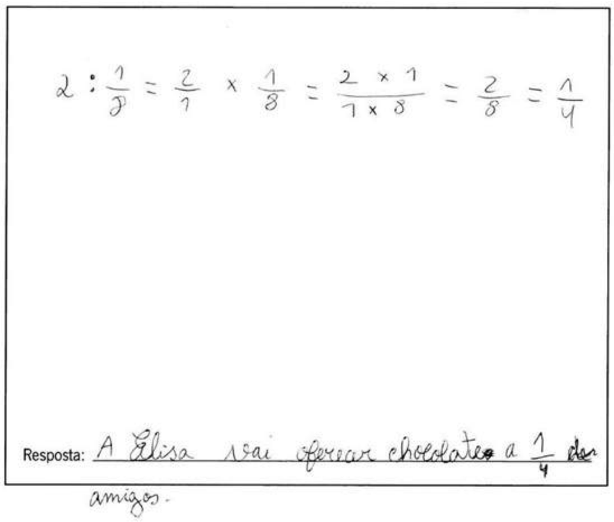


Figura 4: Resolução de um aluno (10) na Tarefa 2 (Problema 2).

Aluno 10 - Nós sabemos que... nós sabemos que dividir estes números é a mesma coisa que multiplicar. Então... 2 a dividir por $\frac{1}{8}$ *é igual a 2 vezes* $\frac{1}{8}$. *E depois é assim... 2 vezes 1 e 1 vezes 8, que é* $\frac{2}{8}$, *que é* $\frac{1}{4}$.

Transcrição 6. Explicação da resolução de um aluno (10) na Tarefa 2 (Problema 2).

Note-se que o aluno 1 afirmou ter procedido da mesma forma. Posto isto, perguntou-se à turma quem tinha uma resolução e/ou resultado diferente e pediu-se que, tal como o colega, a registasse no quadro e procurasse expor os seus raciocínios.

O aluno 13, outrossim, resolveu o problema recorrendo à representação simbólica e calculou incorretamente. A Figura 5 e a Transcrição 7 procuram ilustrar a resolução do aluno 13.

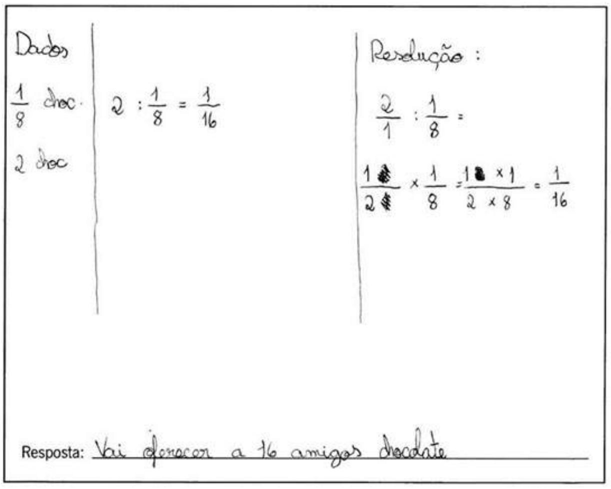


Figura 5: Resolução de um aluno (13) na Tarefa 2 (Problema 2).

Aluno 13 - A regra não é assim (referindo-se à apresentada pelo aluno 10). A regra é: dividir é multiplicar pelo inverso. E então eu fiz isso. Primeiro eu tinha que arranjar uma fração, e 2 é igual a $\frac{2}{1}$. *E agora já dava,* $\frac{1}{2}$ *é o inverso. E depois multipliquei por* $\frac{1}{8}$. *Multipliquei os numeradores e os denominadores, 1 por 1 e 2 por 8. E deu* $\frac{1}{16}$.

Professora - E sendo assim, a tua resposta foi...

Aluno 13 - A Elisa vai oferecer chocolate a 16 amigos. $\frac{1}{16}$ *não dava. É outra vez o inverso.*

Transcrição 7. Explicação da resolução de um aluno (13) na Tarefa 2 (Problema 2).

Sublinhe-se que o aluno 8 procedeu de forma análoga.

Acentue-se, agora, que nove alunos resolveram a Tarefa 2 recorrendo à representação simbólica do problema, no entanto quatro alunos (1, 8, 10 e 13) calcularam incorretamente. Efetivamente, os alunos 10 e 1 parecem ter presente a ideia de que dividir números racionais representados por frações consiste em multiplicar esses números e os alunos 13 e 8, por sua vez, parecem ter presente a ideia de que dividir números racionais representados por frações consiste em inverter o dividendo e multiplicar pelo divisor. Segundo Pinto e Monteiro, este último erro é, de facto, um dos erros típicos, e indicia "uma completa incompreensão do que [os alunos] estão a fazer" ([9], p. 201). De notar, por fim, que a resposta dada a este problema pelos alunos 10 e 1, ao contrário da registada pelos alunos 13 e 8, indicia que os primeiros sentem, também, dificuldades na verificação dos dados e resultados, na medida em que, como se constatou, revelou que detêm falta de sentido crítico face às soluções.

Findo este momento, o aluno 4, que resolveu corretamente o problema recorrendo à representação simbólica do mesmo, procurou expor os seus raciocínios. Este explicou ter multiplicado o dividendo pelo inverso do divisor e, desta forma, ter obtido a resposta ao problema. Esta exposição permitiu à turma identificar e assinalar as incorreções cometidas. Aqui, procurou-se estimular a reflexão e argumentação das concetualizações dos alunos, atendendo-se, também, aos dados e resultados. Como concluíram, as respostas dos alunos 10 e 1 estavam visivelmente incorretas, atentando no conjunto inicial (2 chocolates) e na parte de uma unidade em cada subconjunto ($\frac{1}{8}$ de um chocolate a cada amigo).

Posteriormente, o aluno 14, foi estimulado a apresentar a sua resolução, visto ter desenvolvido uma estratégia que o conduziu à resposta correta (Figura 6).

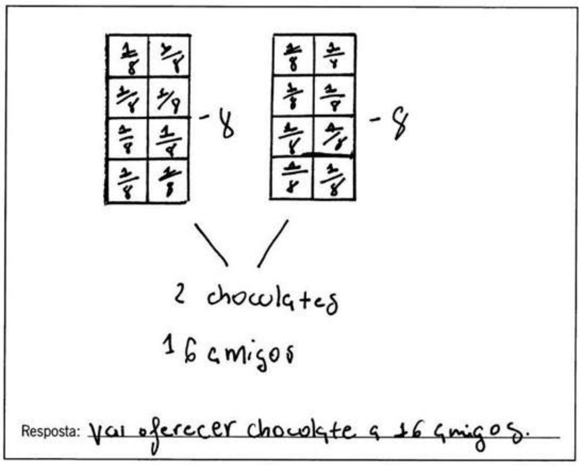


Figura 6: Resolução de um aluno (14) na Tarefa 2 (Problema 2).

Como se pode observar, este aluno resolveu o problema recorrendo à representação pictórica do mesmo. Tal como na 1.ª intervenção, foi dada particular atenção a esta forma de resolução, a qual despertou a curiosidade da turma e se revelou similar à dos alunos 3, 5, 6 e 11.

Em decurso, procurou-se promover a reflexão e argumentação das concetualizações da turma. Constituindo-se a representação ativa por cada um dos alunos fundamental, optou-se, à semelhança da intervenção anteriormente descrita, por distribuir folhas de papel (tamanho A5) por cada aluno, mencionando-se que cada uma destas representava uma unidade, isto é, um chocolate. Posto isto, pediu-se aos alunos que, aos pares, manipulassem o papel, de modo a resolverem (através de outro modo de representação) o Problema 2.

Denotou-se, novamente, um envolvimento dos alunos nesta atividade, que não gerou quaisquer dúvidas. De facto, com o intuito de saber o número de subconjuntos, os pares começaram por representar o conjunto inicial e, posteriormente, separaram-no em subconjuntos com a parte de uma unidade definida à partida. Os alunos 7 e 12 deslocaram-se ao quadro e apresentaram a sua resolução.

Por fim, realizou-se uma sistematização em plenário, tendo sido confrontadas as diferentes resoluções. O principal intuito foi permitir que os alunos estabelecessem uma conexão entre as representações simbólica, icónica e ativa, tendo surgido uma oportunidade de discutir de forma significativa a divisão como medida e a divisão por $\frac{1}{n}$. Neste âmbito, creio que, entre outros aspetos, o facto de se ter optado pela modelação da situação com recurso às folhas de papel e de se tratar de uma situação de divisão de um número inteiro por uma fração unitária permitiu à turma constatar que $2 \div \frac{1}{8} = 2 \times 8 = 16$. Na verdade, segundo o NCTM,

> os alunos poderão desenvolver conhecimentos aprofundados dos números racionais, por meio de actividades com uma diversidade de modelos, como tiras de papel (...). Tais modelos fornecem aos alunos representações concretas de ideias abstractas, facilitando a utilização de representações com compreensão, e a flexibilidade na passagem para representações equivalentes durante a resolução de problemas ([8], p. 254).

Para além disso, Sinicrope, Mick, e Kolb [11], consideram que para estabelecer uma relação entre o raciocínio efetuado na resolução de situações de divisão como medida e o algoritmo utilizado, é mais intuitivo dividir um número inteiro por uma fração unitária.

No final, foi relembrada, em grande grupo, a exploração dos problemas 1 e 2 e sintetizada a informação. Primeiramente, foram identificados os procedimentos comuns à exploração. Em seguida, foram identificados os aspetos que diferenciam os problemas referidos. Num primeiro momento, foi referenciado que o Problema 1 envolve a divisão de um número representado por uma fração por um número inteiro e que o Problema 2, por sua vez, envolve a divisão de um número inteiro por um número representado por uma fração. Em plenário, foi também definida a interpretação de divisão inerente aos problemas explorados. As questões "O que implica esta interpretação de divisão?", "Qual é o objetivo?", "O que indica o divisor?" e "O que indica o quociente?" orientaram essa construção. Só aqui se referiu que estas interpretações se designam, respetivamente, "Divisão como partilha" e "Divisão como medida".

3 Considerações finais

A 1.ª intervenção desenvolvida na turma de 6.° ano de escolaridade objetivava, essencialmente, desenvolver o sentido de divisão em contexto de partilha. Para isso explorou-se o Problema 1, que envolve esta interpretação de divisão, e verificou-se que a maioria dos alunos o identificou como envolvendo uma situação de divisão. A 2.ª intervenção, por sua vez, visava, sobretudo, desenvolver o sentido de divisão com o significado de medida. Neste âmbito, explorou-se o Problema 2, que envolve esta interpretação de divisão, e verificou-se que a maioria dos alunos o identificou como envolvendo uma situação de divisão. Todavia, quatro alunos não identificaram primeiramente o problema como envolvendo uma situação de divisão. Uma vez relido, a expressão numérica correta foi identificada. Posto isto, creio poder afirmar que, na globalidade, não se verificaram dificuldades na identificação dos problemas explorados como envolvendo situações de divisão.

Aquando da exploração do Problema 1, constatou-se que dos oito alunos que recorreram (ou procuraram recorrer) à representação simbólica para o resolver, quatro alunos calcularam incorretamente $\frac{1}{2} \div 4$ e um não o efetuou. Efetivamente, um aluno evidenciou ter mobilizado procedimentos utilizáveis aquando da adição e subtração de números racionais representados por frações e os restantes três alunos resolveram a expressão numérica $\frac{1}{2} \div 4$, como se da expressão numérica $\frac{1}{2} \times 4$ se tratasse. No âmbito do Problema 2, urge afirmar que se verificou que, dos nove alunos que recorreram à representação simbólica do problema, quatro alunos calcularam incorretamente $2 \div \frac{1}{8}$, evidenciando inúmeras dificuldades. Com efeito, dois alunos parecem ter presente a ideia de que dividir números racionais representados por frações consiste em multiplicar esses números e, por sua vez, os outros dois alunos parecem ter presente a ideia de que dividir números racionais representados por frações consiste em inverter o dividendo e multiplicar pelo divisor. Os presentes dados parecem evidenciar, portanto, que se verificaram dificuldades na realização de divisões por métodos formais.

Como supramencionado, pôde-se constatar que ocorreram a princípio incorreções devido à não verificação dos dados dos problemas. Como tal, depois de se terem relido os mesmos, foram facilmente reconhecidos pelos alunos lapsos que se justificaram pela leitura desatenta. Após se ter focalizado a atenção dos alunos nos conjuntos iniciais e nos números de subconjuntos ou nos números de elementos em cada subconjunto, foram também identificadas situações pelos próprios que revelavam a sua falta de sentido crítico face às soluções obtidas. Estes factos pareceram indiciar que se denotaram dificuldades na verificação dos dados e resultados dos problemas.

Importa ainda sublinhar que responder às questões "O que sabemos?", "O que queremos saber?" e "Como vamos descobrir?" aquando da exploração dos problemas se revelou profícuo, na medida em que permitiu, num primeiro momento, sistematizar a informação e, posteriormente, desencadeou discussões acerca das (dis)semelhanças entre os problemas que se revelaram significativas.

É importante, outrossim, referenciar o papel central da manipulação de material neste projeto, uma vez que, como se constatou, para além de motivar os alunos, lhes permitiu modelar e clarificar o seu entendimento dos problemas e da própria representação simbólica. E, ainda, lhes permitiu comunicar eficazmente com os outros.

Referências

[1] Bogdan, R., Biklen, S. *Investigação qualitativa em educação*, Porto Editora, 1994.

[2] Brocardo, J., Serrazina, L. "O sentido do número no currículo de matemática", *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática*, Brocardo, L. Serrazina, I. Rocha (Eds.), 97–115, Escolar Editora, 2008.

[3] Brocardo, J., Serrazina, L., Kraemer, J. "Algoritmos e sentido do número", *Educação e Matemática*, 75, 11–15, 2003.

[4] Huinker, D. "Examining dimensions of fractions operation sense", *Manking sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook*, Litwiller, G. Bright (Eds.), 72–78, National Council of Teachers of Mathematics, 2002.

[5] Martins, J. "O sentido das operações nos alunos do ensino básico", Dissertação de Mestrado, Universidade do Algarve, 2011.

[6] Mendes, F. "A aprendizagem da divisão: um olhar sobre os procedimentos usados pelos alunos", *Da investigação às Práticas*, 3(2), 5–30, 2013.

[7] Ministério da Educação e Ciência. *Programa de matemática para o ensino básico*, Lisboa: Direção Geral da Educação, 2013.

[8] National Council of Teachers of Mathematics. *Princípios e normas para a matemática escolar*, Associação de Professores de Matemática, 2007.

[9] Pinto, H., Monteiro, C. "A divisão de números racionais", *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática*, Brocardo, L. Serrazina, I. Rocha (Eds.), 201–219, Escolar Editora, 2008.

[10] Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., Oliveira, P. Programa de Matemática do Ensino Básico, Lisboa: Ministério da Educação, 2007.

[11] Sinicrope, R., Mick, H., Kolb, J. "Fraction interpretations", *Manking sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook*, Litwiller, G. Bright (Eds.), 153–161, National Council of Teachers of Mathematics, 2002.

[12] Veloso, G., Brunheira, L., Rodrigues, M. "A proposta de programa de matemática para o ensino básico: um recuo de décadas", *Educação e Matemática*, 123, 3–8, 2013.

Vária

Classificação Hierárquica dos Quadriláteros e Comunicação Matemática: Uma experiência com alunos do 4.° ano de escolaridade

Mariana Ferreira, Alexandra Gomes
CIEC/IE, Universidade do Minho
pg25521@alunos.uminho.pt, magomes@ie.uminho.pt

Resumo: *O presente artigo retrata parte de um projeto de intervenção pedagógica supervisionada cujos principais objetivos foram potenciar a compreensão de conceitos geométricos elementares e desenvolver a comunicação matemática nos alunos de uma turma de 4.° ano de escolaridade. De acordo com uma metodologia de investigação de caráter qualitativo, e adotando como estratégia de investigação o estudo de caso, procurou-se perceber que dificuldades se verificaram na construção e classificação de conceitos geométricos elementares e qual o papel desempenhado pela comunicação matemática na aprendizagem de conceitos geométricos elementares.*

Palavras-chave: geometria; quadriláteros; comunicação matemática; 1.° ciclo do Ensino Básico.

1 Classificação dos Quadriláteros e Comunicação Matemática

De acordo com o *National Council of Teachers of Mathematics* [10], do 3.° ao 5.° ano de escolaridade, os alunos devem centrar-se na identificação e descrição de propriedades de formas bi e tridimensionais, desenvolvendo, simultaneamente, o vocabulário especializado que lhes está associado. Para isso, "os alunos devem desenhar e construir formas, comparar e discutir os seus atributos, classificá-las, e elaborar e reflectir sobre definições, baseadas nas propriedades das formas" ([10], p. 191).

Fischbein e Mariotti consideram que o processo de classificação consiste em identificar propriedades comuns pertinentes que determinam uma categoria [4]. Tal como Fonseca refere, "observando os quadriláteros podemos descobrir algumas particularidades que os caracterizam e relacionam uns com os outros" ([5], p. 271). Neste sentido, De Villiers aborda dois tipos de classificação de quadriláteros: partitiva e hierárquica [1].

Numa classificação partitiva, "the various subsets of concepts are considered to be disjoint from one another" ([1], p. 11). O autor apresenta um exemplo de uma classificação partitiva (Figura 1), onde é percetível que os quadrados não são considerados losangos nem retângulos e, por sua vez, estes não são considerados paralelogramos.

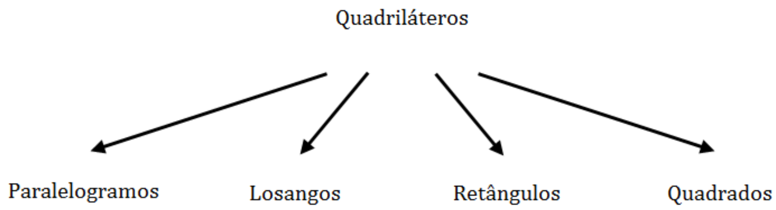


Figura 1: Exemplo de classificação partitiva.

Relativamente à classificação hierárquica, De Villiers esclarece que "by the term hierarchical classification is meant here the classification of a set of concepts in such a manner that the more particular concepts form subsets of the more general concepts" ([1], p. 11). Ora, tendo em conta o exemplo dado anteriormente, quando temos por base uma classificação deste tipo, os losangos e os retângulos são subconjuntos dos paralelogramos e os quadrados aparecem na interseção dos losangos e dos retângulos (Figura 2).

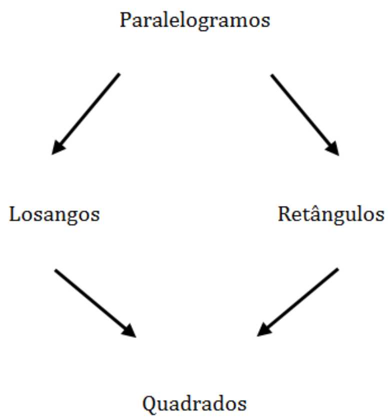


Figura 2: Exemplo de classificação hierárquica.

O processo de definir está, como é evidente, intimamente relacionado com a classificação de qualquer conjunto de conceitos. De Villiers exemplifica esta afirmação referindo que classificar hierarquicamente os paralelogramos como trapézios requer que definamos trapézio como um quadrilátero com pelo menos um par de lados paralelos [1]. Se, pelo contrário, definirmos trapézio como um quadrilátero com apenas um par de lados paralelos, estamos a fazer uma classificação partitiva. Assim, "under the exclusive definitions, parallelograms are not trapezoids. Under the inclusive definition, they are" ([12], p. 27).

Ora, apesar de a classificação partitiva poder ser aceite, a classificação hierárquica é preferencial. No que concerne especificamente à classificação de quadriláteros, os normativos legais em vigor em Portugal, atribuem uma preferência pela classificação hierárquica. A título de exemplo, pode ler-se os seguintes descritores: "reconhecer o quadrado como caso particular do retângulo" ([8], p. 6), "reconhecer o quadrado como caso particular do losango" ([8], p. 12) e "justificar que um paralelogramo é um trapézio" ([8], p. 50).

Erez e Yerushalmy afirmam que "learning in this sense means learning to analyse the attributes of different quads, to distinguish between critical and non-critical attributes of different quads, and also learning the hierarchy among quads" ([3], p. 272). A este respeito, Hershkowitz alerta-nos para a utilização frequente de exemplos protótipos dos conceitos. De acordo com a autora, "the prototype examples were usually the subset of examples that had the longest list of attributes - all the critical attributes of the concept and those specific (noncritical) attributes that had strong visual characteristics" ([7], p. 82). Note-se que *critical attributes* são aqueles que uma figura deve ter para ser considerada exemplo de um dado conceito, enquanto *noncritical attributes* apenas alguns exemplos do conceito possuem [7]. Ora, os *noncritical attributes* dos exemplos protótipos geralmente possuem fortes características visuais, criando, possivelmente, um efeito distrativo. Desta forma, estes podem sobrepor-se à definição do conceito, impedindo os alunos de perceber, por exemplo, tendo por base uma classificação hierárquica, que o quadrado é um retângulo. Os alunos podem criar, assim, uma "imagem limitada do conceito (...) que pode vir a tornar-se um verdadeiro obstáculo de aprendizagem" ([6], p. 99), sendo por isso "necessário que os alunos observem muitos exemplos de figuras correspondentes ao mesmo conceito geométrico, bem como uma variedade de figuras que não sejam exemplos desse conceito" ([10], p. 114), sendo que "é através das discussões de turma, acerca desses exemplos e contra-exemplos, que os conceitos geométricos são desenvolvidos e aperfeiçoados" ([10], p. 114).

Na verdade, o presente estudo tem por base uma perspetiva segundo a qual a matemática é vista como uma "construção cultural partilhada pelos intervenientes e as aulas são caracterizadas pelos processos de interacção social entre o professor e os alunos" ([11], p. 42) "com vista à negociação de conceitos matemáticos e à construção de novos conhecimentos" ([11], p. 43).

O Programa de Matemática para o Ensino Básico preconiza que os desempenhos que os alunos deverão evidenciar em cada ciclo devem concorrer, entre outros aspetos, para uma comunicação adequada à matemática, salientando o facto de que "os alunos devem ser incentivados a expor as suas ideias, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas" ([9], p. 5). De facto, "aprender a analisar e a reflectir sobre o que os outros dizem é essencial ao desenvolvimento do conhecimento e da compreensão quer de conteúdos, quer de processos" ([10], p. 150).

2 O Estudo

O presente estudo é parte integrante de um Projeto de Intervenção Pedagógica Supervisionada realizado no âmbito da unidade curricular Prática de Ensino Supervisionada, incluída no plano de estudos do Mestrado em Ensino nos 1.° e 2.° ciclos do Ensino Básico da Universidade do Minho.

Numa primeira fase, a Prática de Ensino Supervisionada desenvolveu-se no 1.° ciclo do ensino básico, numa turma do 4.° ano de escolaridade pertencente a uma escola de Braga. A turma era constituída por 26 alunos com 9 anos de idade, sendo 15 do sexo feminino e 11 do sexo masculino.

Os principais objetivos deste projeto foram potenciar a compreensão de conceitos geométricos elementares e desenvolver a comunicação matemática. Neste sentido, foram desenvolvidas cinco intervenções, cada uma com a duração de 180 minutos. Sumariamente, na 1.ª intervenção pretendeu-se, essencialmente, desenvolver a compreensão do conceito de polígono; na 2.ª intervenção objetivou--se promover a classificação de polígonos atendendo ao número de lados e à regularidade e a compreensão do que são polígonos geometricamente iguais; na 3.ª intervenção pretendeu-se promover a identificação de propriedades de quadriláteros; na 4.ª intervenção objetivou-se promover a classificação hierárquica dos quadriláteros e potenciar a reflexão sobre as relações entre os quadriláteros; e na 5.ª intervenção pretendeu-se promover a descrição de quadriláteros e a representação de quadriláteros tendo por base uma descrição. Desenvolver a comunicação matemática foi um objetivo transversal a todo o projeto, pelo que foram criados em todas as sessões vários momentos de partilha de pensamentos matemáticos e discussão.

Tendo por base uma metodologia de investigação de caráter qualitativo e utilizando como estratégia de investigação o estudo de caso, pretendeu-se perceber que dificuldades se verificaram na construção e classificação de conceitos geométricos elementares e qual o papel desempenhado pela comunicação matemática na aprendizagem de conceitos geométricos elementares. Neste sentido, a interpretação e avaliação da intervenção baseou-se nos documentos construídos pelos alunos e nas interações aluno-aluno e alunos-professor. Em particular, estas foram possibilitadas graças à observação, ao registo audiovisual de cada intervenção e a registos escritos regulares. Note-se que, da turma, foram selecionados seis alunos, aos quais se atribuíram os seguintes nomes fictícios: Maria, Alice, Guilherme, Rui, Rita e Tomás.

O presente estudo incide, sobretudo, na classificação hierárquica dos quadriláteros, sendo apenas apresentadas a 3.ª e a 4.ª intervenções, intituladas, respetivamente, "Identificação de Propriedades de Quadriláteros" e "Classificação Hierárquica dos Quadriláteros". Uma vez que o Tomás estava doente e não esteve presente nestas duas intervenções, não serão apresentados quer dados escritos, quer orais, referentes a este aluno.

Identificação de Propriedades de Quadriláteros

Nesta intervenção pretendia-se desenvolver a comunicação matemática e promover a identificação de algumas propriedades geométricas, essencialmente, de quadriláteros. Neste sentido, foram criadas duas tarefas [1] às quais se seguiu um jogo[2].

A primeira tarefa era composta por quatro perguntas com a mesma estrutura. Objetivava-se, essencialmente, que os alunos, a partir de um conjunto de polígonos agrupados e de polígonos não agrupados, analisassem as suas propriedades e descobrissem o critério usado para os agrupar. Apesar de ter sido explicitado o que se pretendia com a tarefa, os alunos revelaram algumas dúvidas relativamente ao que era pedido, pelo que foi proposto que respondessem, inicialmente, apenas à primeira pergunta. Findo este momento, seguiu-se uma discussão e correção da resolução, no sentido de diminuir possíveis dificuldades relacionadas com este aspeto.

Perante o primeiro conjunto de polígonos apresentado (Figura 3), a Maria, a Alice, a Rita e o Rui responderam que a propriedade comum aos polígonos agrupados era o facto de terem lados paralelos e o Guilherme respondeu que os polígonos agrupados eram quadriláteros.

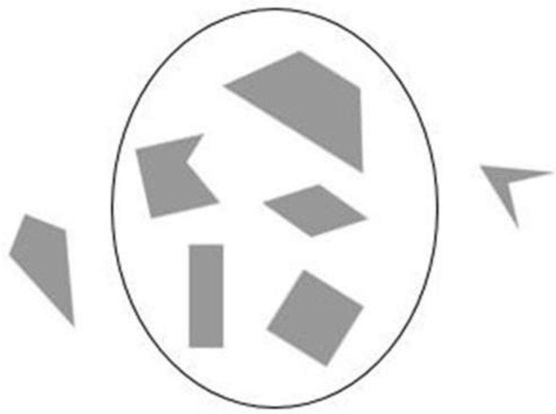


Figura 3: Conjunto de polígonos apresentado na pergunta 1.

A aluna que foi ao quadro explicar o seu raciocínio (Rita) indicou, em cada polígono, os lados paralelos. E, em grande grupo, vimos quantos pares de lados paralelos apresentava cada um dos polígonos agrupados. Concluímos, assim, que enquanto alguns polígonos tinham dois pares de lados paralelos, outros apresentavam apenas um par. A transcrição que se segue revela o diálogo que decorreu após esta constatação, onde se destaca a intervenção final da Rita.

[1]Apenas será aqui descrita a primeira tarefa realizada.
[2]Este jogo resulta de uma adaptação de um jogo intitulado *Guess what* da autoria de Johanson Terry, presente no sítio `http://illuminations.nctm.org/Lesson.aspx?id=2989`

Professora: Então vamos escrever a resposta. Qual foi o critério usado para agrupar os polígonos?
Maria: É ter lados paralelos.
Rita: Eu acho que só acrescentava uma coisa.
Professora: O quê?
Rita: É ter pelo menos um par de lados paralelos.

No final desta discussão, o Guilherme optou por não expor o seu raciocínio inicial, revelando concordar com a resposta dada pelos seus colegas. Note-se que a sua resposta não era aceitável, não só porque era apresentado um pentágono no grupo dos polígonos agrupados, mas porque os polígonos não agrupados eram quadriláteros.

Perante o segundo conjunto de polígonos apresentado (Figura 4), todos os alunos referiram que o critério usado para agrupar os polígonos foi ter dois pares de lados paralelos.

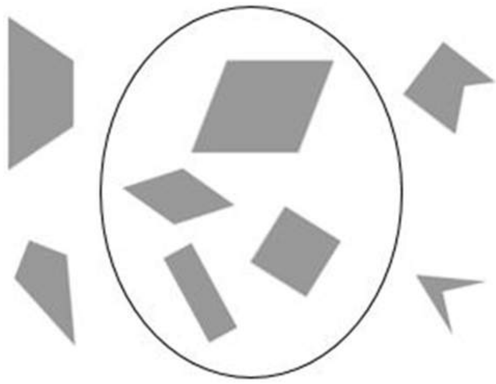


Figura 4: Conjunto de polígonos apresentado na pergunta 2.

No caso do terceiro conjunto de polígonos apresentado (Figura 5), a Maria, a Alice, a Rita e o Rui responderam que o critério usado para agrupar os polígonos foi ter todos os ângulos retos e o Guilherme referiu que foi ter quatro lados, quatro vértices, quatro ângulos e dois pares de lados paralelos.
No momento de partilha das diferentes respostas houve oportunidade para discutirmos diferentes formas de a escrever corretamente, tal como demonstra o seguinte diálogo.

Professora: Agora vamos ver como é que vocês escreveram.
Alice: A propriedade usada para agrupar os polígonos é que têm ambos quatro ângulos retos.
Professora: É verdade?
Alunos: Sim.
Professora: Alguém escreveu de forma diferente?
Rui: É igual, eu não disse quatro ângulos retos, disse todos os ângulos retos.
Catarina: Eu pus apenas ângulos retos.
Professora: Sim. E porque é que escreveste apenas?

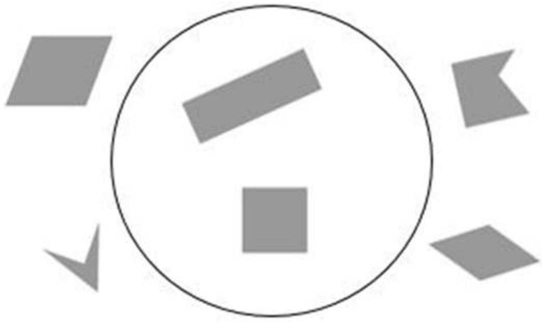


Figura 5: Conjunto de polígonos apresentado na pergunta 3.

Catarina: Porque nas de fora há figuras que também têm ângulos retos, mas não são todos [A aluna foi ao quadro indicar o tipo de ângulos nos polígonos não agrupados].
Rui: Ó professora, mas isso foi o que já dissemos.
Professora: Pois foi, mas foi dito de forma diferente. Tu disseste que os polígonos agrupados tinham todos os ângulos retos. Ela disse que tinham apenas ângulos retos. É o mesmo, mas foi outra forma de dizer corretamente.

Este diálogo foi importante para que os alunos analisassem e refletissem sobre o que os seus colegas escreveram, tomando consciência de que as respostas não têm necessariamente de ser iguais para serem igualmente corretas. O Guilherme voltou a dar uma resposta não aceitável, parecendo revelar, ainda, alguma incompreensão da tarefa. O aluno escreve, de facto, propriedades dos polígonos agrupados - "ter cada um quatro lados com dois pares de lados paralelos, quatro vértices e quatro ângulos" -, algumas das quais comuns aos polígonos não agrupados, não identificando, desta forma, o critério utilizado para os agrupar.

Perante o quarto conjunto de polígonos apresentado (Figura 6), a Alice, o Guilherme, a Rita e o Rui referiram que o critério usado para agrupar os polígonos foi ter todos os lados do mesmo polígono com igual comprimento. A Maria, apesar de ter identificado corretamente um critério usado para agrupar os polígonos, este diferiu do indicado pelos restantes colegas - "eu descobri que se nós dividirmos por aqui os polígonos agrupados [a aluna traçou as diagonais de cada um dos polígonos agrupados] formam-se triângulos geometricamente iguais" (Maria).
Aquando da partilha das respostas surgiu uma situação de discussão, a seguir transcrita, interessante do ponto de vista da comunicação matemática.

Dinis: A propriedade usada para agrupar os polígonos é ter os lados todos com a mesma medida.
Alice: [Dirigida ao Dinis] *Em todas as figuras o comprimento dos lados é o mesmo? Eu acho que não.*
Professora: Porquê?
Alice: Neste eu sei que cada lado mede dois centímetros. Neste eu já não me lembro, mas sei que mede diferente de dois centímetros. E neste aqui também. Por isso não podemos dizer que todos os polígonos [agrupados] *têm os lados com*

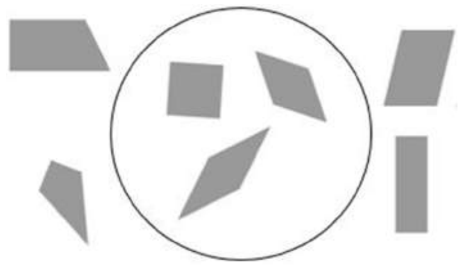


Figura 6: Conjunto de polígonos apresentado na pergunta 4.

o mesmo comprimento.
Professora: O que é que tu querias dizer (Dinis)?
Dinis: Que cada figura tem os lados com o mesmo comprimento.

De facto, o diálogo mostra que a Alice revela fazer uma análise crítica daquilo que o seu colega escreveu, ajudando-o a tomar consciência de que é necessário ter algum rigor linguístico ao escrever a sua resposta sob pena de, neste caso, não ser compreendido pelos seus colegas.

No final da intervenção foi realizado um jogo onde os alunos tinham de identificar e comparar propriedades de quadriláteros. Neste sentido, foi distribuído, por cada aluno, um envelope que continha cartões com representações de quadriláteros (Figura 7).

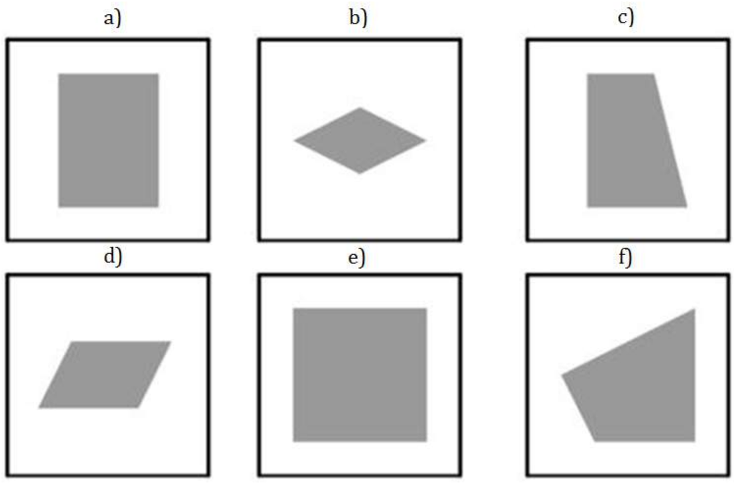


Figura 7: Cartões com representações de quadriláteros distribuídos pelos alunos.

Os alunos foram informados que iria ser selecionado um dos quadriláteros e que deveriam tentar descobrir qual era. Para isso, deveriam fazer perguntas acerca das propriedades que o quadrilátero possuía (Exemplo: O quadrilátero tem dois pares de lados paralelos?) e só iriam obter uma das seguintes respostas: "sim" ou "não". Note-se que foi esclarecido que os alunos não poderiam utilizar a designação atribuída ao quadrilátero (Exemplo: É o quadrado?). À medida que as perguntas iam sendo respondidas, os alunos deveriam ir eliminando hipóteses e, quando descobrissem, deveriam partilhar com a turma, justificando o seu raciocínio. Para facilitar o momento de discussão que se seguiu, foram escritas no quadro todas as perguntas que os alunos fizeram, bem como todas as respostas.

Ressalve-se que o jogo contemplou quatro repetições. Contudo, apenas será dado destaque às duas primeiras jogadas por apresentarem mais relevância para o estudo.

Na Tabela 1 são apresentadas as perguntas colocadas durante a primeira jogada, bem como as respostas dadas e os quadriláteros que era possível eliminar com cada informação. Note-se que, durante as jogadas, houve alunos que julgavam ter descoberto o polígono sem, contudo, terem dados suficientes para o fazer. Estas intervenções apresentam-se nas tabelas relativas a cada jogada (Tabelas 1 e 2) sob a forma de uma linha sombreada.

Tabela 1: Primeira jogada.

Aluno	**Pergunta**	**Resposta**	**Quadriláteros Eliminados**
Dinis	Tem todos os lados com o mesmo comprimento?	Não	b), e)
André	Os ângulos têm todos a mesma amplitude?	Não	a)
Martim	Tem quatro lados?	Sim	-
Rui	Tem dois pares de lados paralelos?	Não	d)
Rui	Tem pelo menos um par de lados paralelos?	Não	c)

A Rita, depois das primeiras três perguntas e respetivas respostas disse que já tinha descoberto o polígono - considerava que era o polígono d). Neste sentido, percorremos cada uma das perguntas para aferirmos qual dos polígonos conseguiríamos eliminar com cada uma das informações. A aluna referiu que, com a primeira resposta, conseguiu eliminar o quadrilátero b) e e) e, com a segunda, o quadrilátero a). Note-se que a pergunta feita pelo Martim não fez sentido para a maioria dos alunos uma vez que todos os polígonos tinham quatro lados, não sendo possível eliminar nenhum quadrilátero - "Todos têm quatro lados. Esta pergunta é desnecessária" (Alice). Após este momento, a Rita percebeu que a conclusão a que tinha chegado era precipitada - "Professora, preciso de mais perguntas..." (Rita) -, pelo que o jogo prosseguiu.

No final da resposta à última pergunta do Rui quase todos os alunos levantaram o dedo porque já tinham descoberto que era o quadrilátero f). Mesmo assim, confirmamos que polígonos conseguiríamos eliminar com cada uma das informações. Depois de descoberto o polígono, resolvi fazer uma extensão ao jogo, tal como se pode ler na seguinte transcrição.

Professora: Vocês fizeram estas perguntas todas até descobrir. Agora que vocês sabem qual era o polígono, que pergunta é que vocês me fariam para descobrir mais rápido?
Dinis: Tem pelo menos um par de lados paralelos?
Professora: E eu dizia não. E eliminávamos quais?
Rui: Essa, essa, essa, essa e essa [a), b), c), d), e)].

Ora, este exemplo mostra que estes alunos revelam ser capazes de analisar os atributos dos diferentes quadriláteros representados e distinguir entre *critical attributes* e *noncritical attributes* [7]. De facto, rapidamente constataram que a propriedade "ter pelo menos um par de lados paralelos" era comum a todos os quadriláteros, exceto ao quadrilátero f).

Na segunda jogada (Tabela 2), depois de responder às duas primeiras perguntas, o Rodrigo achou que já tinha descoberto (o aluno pensou que era o polígono e)), pelo que fomos, novamente, confirmar. Apurou-se que o aluno considerou que o losango não quadrado não tinha todos os lados com igual comprimento. Note-se que o aluno tinha acertado no polígono, mas como não tinha informação suficiente para o afirmar, depois de a dúvida do aluno ter sido esclarecida, o jogo continuou.

Tabela 2: Segunda jogada.

Aluno	**Pergunta**	**Resposta**	**Quadriláteros Eliminados**
Catarina	Tem pelo menos um par de lados paralelos?	Sim	f)
Maria	Os lados têm todos o mesmo comprimento?	Sim	a), c), d)
Alice	Tem pelo menos um ângulo reto?	Sim	b)

Depois de respondida a última pergunta, um grande número de alunos voltou a levantar o dedo, uma vez que já tinha descoberto o polígono em questão - e). À semelhança do que foi feito na jogada anterior, no final, perguntei aos alunos que pergunta(s) me fariam para descobrir mais rapidamente o polígono.

Rita: Eu fazia uma pergunta que era: todos os seus ângulos são ângulos retos? E a professora dizia sim. E eliminávamos este, este, este e este [f), c), b) e d)].
Professora: Sim, e ficávamos com dois... por isso tínhamos que fazer outra.
Rui: Todos os seus lados têm igual comprimento?
Professora: E eu respondia não e eliminávamos esta [a)]. *E só com duas perguntas descobríamos.*

Na verdade, creio que a opção pela realização deste jogo foi profícua, na medida em que proporcionou um reforço das aprendizagens acerca das propriedades dos quadriláteros. Para além disso, os alunos encontraram no jogo uma motivação adicional, desenvolvendo, simultaneamente, a comunicação e o raciocínio matemático

Classificação Hierárquica dos Quadriláteros

Esta intervenção tinha como objetivo primordial a criação de um esquema de classificação hierárquica dos quadriláteros tendo por base as propriedades estudadas.

Num primeiro momento, foi realizada uma tarefa onde os alunos tinham de reconhecer se certos quadriláteros (Figura 8) detinham determinadas propriedades (pelo menos um par de lados paralelos, dois pares de lados paralelos, todos os ângulos internos com igual amplitude, todos os lados com igual comprimento).

Figura 8: Quadriláteros representados na tarefa.

Apesar de os alunos em estudo terem efetuado toda a tarefa com correção, houve alguns que, quando o quadrilátero apresentava dois pares de lados paralelos, não selecionaram a propriedade ter pelo menos um par de lados paralelos. Este aspeto foi debatido em grande grupo, tendo contribuído para o seu esclarecimento a intervenção dos restantes alunos - "Se tem dois [pares de lados paralelos] tem de ter pelo menos um" (Rui).

A este momento seguiu-se a apresentação do diagrama, que serviu de base ao esquema, contemplando apenas uma etiqueta (Figura 9). Antes de completarmos o diagrama numa cartolina de formato A2, este foi projetado e construído em discussão com os alunos, no computador.
O preenchimento do diagrama teve várias fases. Inicialmente, pediu-se aos alunos que organizassem, no mesmo, as diferentes propriedades contempladas na tarefa anterior, sendo neste momento irrelevante as designações atribuídas aos quadriláteros. Posteriormente, foi pedido que referissem onde deveríamos colocar, no diagrama, os diferentes quadriláteros presentes na tarefa anteriormente realizada, não tendo sido notada a presença de qualquer dúvida. Numa terceira fase, foi pedido aos alunos que se pronunciassem relativamente às designações dos quadriláteros. Note-se que estes apenas tinham conhecimento das designações quadrado, retângulo e losango, tendo sido apresentadas, neste momento, as designações trapézio e paralelogramo.

Numa última fase, foi pedido aos alunos que "definissem"[3] cada um dos tipos

[3]Ressalve-se que, apesar de se considerar que aprender a definir é um problema basilar da

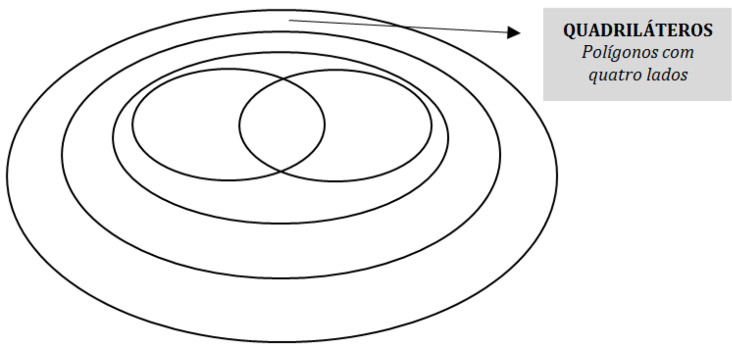


Figura 9: Diagrama que serviu de base ao esquema de classificação hierárquica dos quadriláteros.

de quadriláteros envolvidos. Comecei por perguntar-lhes o que era um trapézio. A Maria referiu que era um polígono que tinha pelo menos um par de lados paralelos. Neste sentido, representei um undecágono com um par de lados paralelos. Veja-se, na seguinte transcrição, o diálogo que se seguiu a este momento.

Maria: Paralelogramo é um trapézio com dois pares de lados paralelos.
Professora: Quando nós dizemos "paralelogramo é um trapézio", o que é que nós já estamos a dizer?
Rui: Que tem quatro lados e pelo menos um par de lados paralelos.
Alice: E só temos de acrescentar os dois pares de lados paralelos. Mas um trapézio não tem dois pares de lados paralelos...
Maria: Pode ter!
Rui: Pois pode, porque ali diz pelo menos. Um paralelogramo é um trapézio porque tem pelo menos um par de lados paralelos, mas tem dois. Então, é um trapézio com dois pares de lados paralelos.

De facto, apesar de a Alice já ter contactado com exemplos e contraexemplos do conceito em causa, o protótipo de trapézio ainda predomina. Isto é, vê o trapézio como um quadrilátero com exatamente um par de lados paralelos, não aceitando que o paralelogramo é um trapézio, baseando-se, desta forma, numa classificação partitiva.

Quando perguntei aos alunos o que consideravam ser um retângulo a resposta foi imediata - "Retângulo é um paralelogramo com todos os seus ângulos internos com igual amplitude" (Guilherme). No entanto, a Maria teve algumas dúvidas, tendo sugerido o acréscimo de uma condição, tal como se pode ver na seguinte transcrição.

Maria: Eu não discordo do que ele disse, mas acho que devíamos acrescentar que tem dois pares de lados paralelos.

---

educação matemática, sendo essencial envolver ativamente os alunos no processo de definir [2], não é expectável que os alunos nos primeiros anos produzam definições que obedeçam a todos os princípios lógicos. Por este motivo, sempre que se tratarem de definições construídas pelos alunos serão colocadas aspas.

Alice: Eu vou ajudar a (Maria). Nós ao dizermos paralelogramo já estamos a dizer isso.
Professora: (Alice), anda escrever aqui aquilo que nós já estamos a dizer quando escrevemos paralelogramo. [Figura 10]

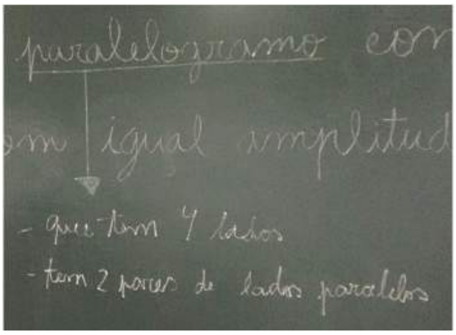


Figura 10: Intervenção da Alice no quadro.

Veja-se que, uma vez mais, foi fundamental a intervenção dos alunos, destacando--se a Alice, que revela compreender que uma definição estabelece condições necessárias e suficientes, tendo mostrado à Maria que a sua sugestão não era necessária à definição já construída. Relativamente à definição de losango, todos os alunos concordaram com a intervenção do Guilherme - "Um losango é um paralelogramo com todos os lados com o mesmo comprimento".

O processo de construção da "definição" de quadrado teve como ponto de partida uma intervenção do André, que foi escrita no quadro: "Um quadrado é um quadrilátero com dois pares de lados paralelos, com todos os seus lados com igual comprimento e com todos os seus ângulos com igual amplitude". Tendo por base esta intervenção, foram detalhadamente exploradas as afirmações da Rita - "Eu acho que podemos dizer de outra maneira. O quadrado é um retângulo com todos os seus lados com igual comprimento" - e do Guilherme - "Eu acho que o quadrado também é um losango com todos os ângulos internos com igual amplitude" (Figura 11).

Figura 11: Registo no quadro da intervenção do André, da Rita e do Guilherme.

A Maria, aquando desta discussão, apesar de ter concordado com a intervenção da Rita, mostrou alguma relutância em aceitar que o quadrado é um losango, tal como afirmado pelo Guilherme. A este respeito, veja-se a seguinte transcrição.

Professora: E por que é que um quadrado é um losango?
Maria: Não é...
Rui: É, é!
Professora: Bem, a (Maria) diz que não é, o (Rui) diz que é. (Maria) por que é que achas que um quadrado não é um losango?
Maria: Porque... calma. O quadrado tem todos os ângulos internos com igual amplitude...
Rui: Ó (Maria), então assim um quadrado também não pode ser um retângulo! Eu sei qual é a dúvida dela. É porque o losango não tem uma propriedade que o quadrado tem, mas o retângulo também não tem. (Maria), um quadrado é um losango porque tem todas as propriedades que um losango tem, que são ter quatro lados, ter dois pares de lados paralelos e ter todos os lados com igual comprimento, mas ainda tem mais uma que é ter todos os ângulos internos com igual amplitude, mas isso não quer dizer que ele não seja um losango.
Professora: Percebeste (Maria)?
Maria: Sim.

Na verdade, tal como sublinhado pelo Rui, por uma figura possuir determinadas propriedades, diferentes de outra, não significa que a primeira não possa pertencer a um subconjunto da segunda. A imagem do conceito de losango que a Maria parece ter é a de um paralelogramo com quatro lados congruentes, um par de ângulos agudos congruentes e um par de ângulos obtusos congruentes, vendo estas características como *critical attributes* [7]. Ora, como o quadrado não possui todos estes atributos, a Maria considera que o quadrado não é um losango.

No final da intervenção, colamos as respetivas etiquetas na cartolina e foram distribuídos mais cartões com representações de quadriláteros, de forma a minimizar a criação de imagens dos conceitos incorretas/incompletas, sendo pedido aos alunos que os colassem no local onde consideravam correto e justificassem a sua opção. Nesta atividade não se verificaram dificuldades.

3 Considerações Finais

Ao longo do presente estudo, foi possível verificar que as dificuldades observadas na construção e, consequentemente, na classificação de conceitos geométricos se relacionaram com o facto de o raciocínio geométrico dos alunos ser significativamente influenciado pelas suas restritas imagens mentais dos conceitos, associadas, frequentemente, a exemplos protótipos. Relacionada com esta dificuldade, que se prende com a natureza complexa dos conceitos figurativos e provavelmente com as experiências de aprendizagem proporcionadas até então, encontra-se a complexidade em analisar os atributos dos diferentes quadriláteros e em distinguir *critical attributes* e *noncritical attributes* [7].

Ao longo do estudo, foi também notória a crescente consciencialização, por parte dos alunos, da importância de comunicar o seu pensamento de forma coerente e clara, utilizando uma linguagem correta do ponto de vista matemático. Note-se que, para tal, foi essencial o papel desempenhado pelos restantes alunos, nomeadamente no que diz respeito à análise e reflexão feitas sobre as intervenções orais e/ou escritas. Foi visível que estas estratégias contribuíram, também, para o reconhecimento dos colegas como interlocutores a atender durante o processo de aprendizagem.

Na verdade, as oportunidades e incentivos dados aos alunos para comunicar matematicamente (quer escrita, quer oralmente) e o confronto de pensamentos matemáticos, aliado à consciencialização da importância do uso de uma linguagem matematicamente correta, desenvolveu, nos alunos, a capacidade de comunicação matemática. Esta afirmação corrobora a conclusão de Ponte et al. [11]:

> É ao escrever e falar sobre a Matemática, usando a linguagem não só para expressar os seus pensamentos, mas também para partilhar significados, para compreender os argumentos dos outros alunos e do professor, que os alunos desenvolvem a sua capacidade de comunicação matemática. ([11], p. 46)

Conclui-se, ainda, que a comunicação matemática teve um papel basilar para apoiar a compressão dos conceitos geométricos por parte dos alunos. Ora, durante o processo de comunicação foram negociados, em grande ou pequeno grupo, diferentes significados, o que contribuiu para que os alunos refletissem sobre a sua compreensão matemática e aprofundassem e alargassem os seus conhecimentos acerca de conceitos matemáticos.

Referências

[1] De Villiers, M. "The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals", *For the learning of mathematics*, 14(1), 11–18, 1994.

[2] De Villiers, M. "To teach definitions in geometry or teach to define?", *Proceedings of the twenty-second international conference for the psychology of mathematics education*, 2, 248–255, 1998.

[3] Erez, M., Yerushalmy, M. "If you can turn a rectangle into a square, you can turn a square into a rectangle: Young students experience the dragging toll", *International journal of computers for mathematical learning*, 11(3), 271–299, 2006.

[4] Fischbein, E., Mariotti, M. A. "Defining in classroom activities", *Educational studies in mathematics*, 34, 219–248, 1997.

[5] Fonseca, L. "Geometria no plano", *Elementos de matemática para professores do ensino básico*, P. Palhares (Ed.), 251–302, Lidel, 2004.

[6] Gomes, A. "Um estudo sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.° ciclo: O problema dos conceitos fundamentais em geometria", Tese de Doutoramento, Universidade do Minho, 2003.

[7] Hershkowitz, R. "Psychological aspects of learning geometry", *Mathematics and cognition: a research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education*, J. Kilpatrick, P. Nesher (Eds.), 70–95, Cambridge University Press, 1990.

[8] Ministério da Educação e Ciência. *Metas curriculares de matemática para o ensino básico*, Lisboa: Direção Geral da Educação, 2012.

[9] Ministério da Educação e Ciência. *Programa de matemática para o ensino básico*, Lisboa: Direção Geral da Educação, 2013.

[10] National Council of Teachers of Mathematics. *Princípios e normas para a matemática escolar*, Associação de Professores de Matemática, 2007.

[11] Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veiga, L., Viseu, F. "A comunicação nas práticas de jovens professores de matemática", *Revista portuguesa de educação*, 20(2), 39–74, 2007.

[12] Usiskin, Z., Griffin, J. *The classification of quadrilaterals*, Information Age Publishing, 2008.

Problemas dos Nossos Avós (3)

Helder Pinto
CIEC/IE, CIDMA - Universidade de Aveiro
hbmpinto1981@gmail.com

Resumo: *Nesta secção do Jornal das Primeiras Matemáticas apresentam-se regularmente alguns problemas de matemática de livros escolares portugueses do passado.*

Palavras-chave: manuais de matemática antigos, problemas de matemática elementar.

1 Preâmbulo

Os problemas escolares utilizados no ensino da Matemática, em particular no ensino elementar, têm sofrido algumas alterações ao longo dos tempos. Muitas vezes a diferença não está nos conteúdos – pois as matérias básicas como a aritmética e a geometria, de grosso modo, mantém-se as mesmas – mas sim na forma e no contexto com que estes problemas são apresentados.

Nesta secção do *Jornal das Primeiras Matemáticas* apresentaremos regularmente alguns problemas de matemática que foram publicados em livros escolares portugueses do passado. Contaremos com a colaboração dos nossos leitores, que poderão fazer-nos chegar cópias de problemas antigos que considerem interessantes através de o e-mail hbmpinto1981@gmail.com.

2 Cartilha maternal (João de Deus)

O texto indicado nesta edição é a obra *Cartilha Maternal ou Arte de Leitura* da autoria de João de Deus (1830-1896). Esta obra, escrita pela primeira vez em 1876 e alvo de variadíssimas edições ao longo dos anos, apresenta um método de ensino da leitura às crianças. Na Figura 1 reproduz-se a página de apresentação deste livro onde se pode observar a imagem do seu autor; a edição aqui indicada é de 1878 e é substancialmente alargada em relação ao que é usual, pois contém uma explicação detalhada de como devem decorrer as vinte e quatro lições deste método (não contém o *Hino de Amor* que finalizava muitas destas cartilhas). Esta edição pode ser acedida na Biblioteca Nacional Digital em `http://purl.pt/145`.

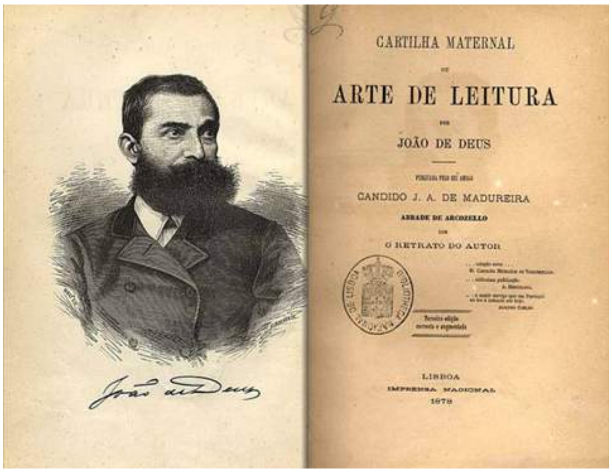
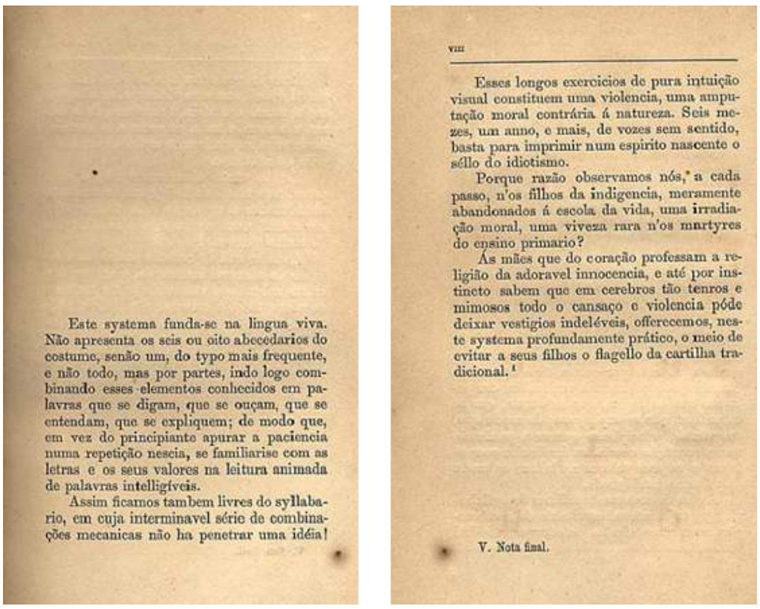


Figura 1: Deus, João de; *Cartilha Maternal ou Arte de Leitura* [1].

Na Figura 2 é apresentado o preâmbulo desta obra onde autor explica os princípios e as vantagens do seu método:



Este systema funda-se na lingua viva. Não apresenta os seis ou oito abecedarios do costume, senão um, do typo mais frequente, e não todo, mas por partes, indo logo combinando esses elementos conhecidos em palavras que se digam, que se ouçam, que se entendam, que se expliquem; de modo que, em vez do principiante apurar a paciencia numa repetição nescia, se familiarise com as letras e os seus valores na leitura animada de palavras intelligíveis.

Assim ficamos tambem livres do syllabario, em cuja interminavel série de combinações mecanicas não ha penetrar uma idéia!

VIII

Esses longos exercicios de pura intuição visual constituem uma violencia, uma amputação moral contrária á natureza. Seis mezes, um anno, e mais, de vozes sem sentido, basta para imprimir num espirito nascente o séllo do idiotismo.

Porque razão observamos nós,* a cada passo, n'os filhos da indigencia, meramente abandonados á escola da vida, uma irradiação moral, uma viveza rara n'os martyres do ensino primario?

Ás mães que do coração professam a religião da adoravel innocencia, e até por instincto sabem que em cerebros tão tenros e mimosos todo o cansaço e violencia póde deixar vestigios indeléveis, offerecemos, neste systema profundamente prático, o meio de evitar a seus filhos o flagello da cartilha tradicional.[1]

V. Nota final.

Figura 2: Preâmbulo da *Cartilha Maternal ou Arte de Leitura* [1].

Para complementar este método de ensino da leitura foi criado, posteriormente, uma segunda parte onde se apresentavam vários textos simples para praticar a leitura, recorrendo a temáticas usuais da época como, por exemplo, o *Amor filial*, o *Respeito e honra aos pais* e o *Amor fraternal*. Na Figura 3, é apresentado o interessante texto *Comportamento escolar*.

COMPORTAMENTO ESCOLAR

O filho obediente faz em tudo a vontade a seus pais; e, se o mandam à escola, deve-se aplicar, que a utilidade é sua.

Porque sem instrução a gente é como os animais.

Só ela nos ensina a desempenhar bem as nossas obrigações, e aumenta os nossos recursos e o nosso préstimo, alumiando o nosso espírito.

A instrução é tão necessária como o sustento: advertindo que do sustento os mesmos animais precisam.

E como se há-de comportar quem vai à escola?

Indo pelo caminho que lhe marcam, sem se apartar nem distrair; chegando a horas; entrando sossegado; tomando o seu lugar, com o menor incómodo possível dos companheiros; prestando muita atenção ao mestre; e, quer seja observado, quer não, conservando-se sempre com a devida seriedade.

Um discipulo deve ser modesto, sem ser acanhado: quando não entende alguma cousa, pede licença para perguntar, e o mestre explica.

Não deve ter vaidade, que se torna odioso, nem fazer zombaria dos que aprendem menos, porque talvez não seja falta de cuidado, e sim falta de entendimento, o que não é culpa de cada um.

Um aluno bem-educado não conta as faltas dos companheiros; assim como também não vai à escola contar o que fizeram cá fora; não acusa nem compromete os mais.

Seja diante de quem for, devemos proceder de modo que se mostre a nossa boa educação, e fazendo de conta que estão presentes os nossos pais.

PROVÉRBIO

Um dia o soberbo cai,
E o humilde sobressai.

Figura 3: Edição recente da Bertrand Editora [2].

Note-se que este último texto foi retirado de uma edição recente da Bertrand Editora.

Mas qual a ligação desta obra com a Matemática? Em primeiro lugar, o facto de no último texto desta parte complementar poder-se encontrar o que foi designado por *Tábua de Pitágoras*. Refere-se, como apresentação, que este quadro é muito antigo e que com ele se "aprende a somar parcelas iguais e a multiplicar".

O seguinte quadro é tão antigo como simples e engenhoso.

Por ele se aprende a somar parcelas iguais e a multiplicar: a somar lendo as colunas de cima para baixo; por exemplo:

$$\begin{array}{r} 2 \\ \text{e } 2 \\ \hline 4 \\ \text{e } 2 \\ \hline 6, \text{ etc.} \end{array}$$

e a multiplicar lendo, ao comprido, as regras 1, 2, 3, 4, 5, etc., repetindo sempre as vezes que queremos esses números multiplicados; deste modo: 3 vezes 1, 3 vezes 2, 3 vezes 3, etc. O resultado vem logo por baixo desses algarismos nas mesmas somas, porque tanto faz 2 e 2, como 2 vezes 2; 3 e 3 e 3, como 3 vezes 3, etc.

137

TÁBUA DE PITAGORAS

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2 vezes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3 »	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4 »	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5 »	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6 »	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7 »	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8 »	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9 »	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10 »	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Figura 4: *Tábua de Pitágoras* [2].

Uma outra ligação à Matemática é o facto de o matemático Alfredo Rocha Peixoto (lente da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra) ter defendido entusiasticamente esta obra, enquanto deputado no parlamento, a 7 de maio de 1879. Deixamos aqui parte da transcrição da ata desse dia onde se pode perceber o entusiasmo com que este método estava a ser recebido.

Sr. Presidente, o sr. ministro do reino quer um decreto regulamentar, que previna o maior numero de hypotheses, pelo menos as mais provaveis, emfim uma obra que eleve a instrucção primaria á altura a que é necessário em que ella esteja.

Ácerca d'este assumpto, que sem dúvida é fundamental para uma nação culta, vou apresentar uma proposta, que é assignada tambem por seis dos mais distinctos collegas; e, se não a assignam mais, é porque o regimento d'esta casa não admitte que um projecto tenha mais de sete assignaturas.

É assignado pelo nosso muito illustrado e querido collega, o sr. Osorio de Vasconcellos, que n'esta casa foi o primeiro apostolo de tão fecundo methodo, em cuja propagação tem empenhado com efficaz influencia a sua eloquente voz na nossa tribuna e a sua brilhante e sabia penna na imprensa periódica. É assignado por quatro professores de instrucção superior, que mais altamente honram a sua classe, o paiz e a sciencia; e são estes os srs. drs. Adriano Machado, Gomes Teixeira, Rodrigues de Freitas e Pires de Lima; é assignado pelo respeitabilissimo collega, o sr. Paula Medeiros, que só dá o seu voto a propostas de reconhecida justiça e manifesta vantagem.

Emfim, considero elevada honra ter o meu nome em seguida a nomes de tão conspicua auctoridade.

Attendendo á importancia do beneficio que assim pedimos para a instrucção primaria, não me parece exagerada a quantia que propomos.

[. . .]

Para a prova da excellencia d'este methodo, tenho aqui uma nota das localidades em que d'elle têem sido dadas, com excellente resultado, provas publicas. Taes localidades são o Porto, Coimbra, Braga, Faro, Santarem, Figueira da Foz, Penafiel, Gouveia, Alemquer, Aviz, Niza, Thomar e muitas outras terras.

Houve prelecções para a propagação d'este methodo em quasi todos os concelhos do meu distrito; e digo quasi, porque não tenho a certeza de que hajam sido feitas em todos.

Ha um argumento que desvanece todas as duvidas que possam occorrer a espiritos menos crentes, ou menos esclarecidos, ou menos rectos, acerca da excellencia do methodo; é a rapidez, verdadeiramente assombrosa, com que têem sido esgotadas as edições da Cartilha Maternal e dos quadros parietaes.

[...]

É um verdadeiro milagre a dedicação com que tantos homens de sciencia e boa vontade se empenham na propagação d'este Methodo.

[...]

Tenho dito.
(O orador foi comprimentado por varios srs. deputados.)

Leu-se na mesa a seguinte

Proposta

Propomos que o governo seja auctorisado a gastar até á quantia de 6 : 000\$000 réis:

1° Para que o methodo de João de Deus seja authentica e officialmente ensinado na escola normal.

2° Para facilitar aos professores primários a aprendizagem do methodo com o auctor ou com os seus interpretes auctorisados.

3° Para prover as escolas publicas com livros e objectos necessarios ao ensino por este methodo. = Pires de Lima = José Joaquim Rodrigues de Freitas = Henrique de Paula Medeiros = Francisco Gomes Teixeira = A. Osorio de Vasconcellos = A. da Rocha Peixoto = Adriano Abreu Cardoso Machado.

(Diário da Camara dos Senhores Deputados; Imprensa Nacional, Lisboa, 1879)

Realce-se ainda neste ponto que um dos subscritores desta proposta de lei era precisamente o mais importante matemático português do seu tempo, o matemático Gomes Teixeira e que, à época, era também professor da Universidade de Coimbra (em 1884 transferiu-se para a Academia Politécnica do Porto). Este apoio é significativo dado que Gomes Teixeira teve muito pouca participação parlamentar e foram pouquíssimas as propostas de lei que levaram a sua assinatura.

Agradecimento

Este trabalho foi financiado pelo CIDMA-Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações e pela FCT-Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito do projecto UID/MAT/04106/2013.

Referências

[1] Deus, João de. *Cartilha Maternal ou Arte de Leitura*, Imprensa Nacional, Lisboa, 1878.

[2] Deus, João de. *Cartilha Maternal ou Arte de Leitura.* Bertrand Editora, (10.ª ed.) Lisboa, 2012.