

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu site [www.atractor.pt](http://www.atractor.pt). Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para [atractor@atractor.pt](mailto:atractor@atractor.pt)

## LUZ E COR

O que é que acontece a um raio de luz branca quando encontra uma gota de água no ar?

No anterior número da *Gazeta* [1] foram abordadas algumas propriedades básicas dos trajetos dos raios luminosos que atravessam meios percorridos pela luz com velocidades diferentes, por exemplo o ar e a água (ou o vidro). Analisámos situações particularmente simples, com raios situados num plano, e em que havia apenas dois meios, sendo a linha de separação uma reta. Foi também referido que o percurso do raio luminoso minimiza (localmente) o tempo gasto e isso permite encontrar uma analogia com uma situação qualitativamente do mesmo tipo: a de um nadador-salvador a socorrer um banhista em apuros... E concluímos que a razão entre os "afastamentos" dos raios de chegada e de partida, relativamente à normal no ponto de mudança do meio, é igual à razão entre as velocidades nos dois meios (figura 1). No caso da luz, essa razão é designada por índice de refração de um meio relativamente ao outro.

Na primeira parte do presente texto consideraremos algumas situações análogas às já discutidas no anterior, mas em que ou há mais do que uma mudança de meios durante o percurso ou há uma separação de meios que é feita através de uma linha curva (não necessariamente uma reta), ou ocorrem ambas estas condições.

Queremos mostrar que o percurso que permite ao nadador-salvador chegar mais rapidamente ao afogado é o percurso A-C-B tal que :

$$\frac{\frac{DC}{AC}}{\frac{EC}{BC}} = \frac{\text{vel corrida}}{\text{vel natação}}$$

(Se conhecer funções trigonométricas, note que esta igualdade equivale a  $\frac{\text{Sen } \beta}{\text{Sen } \alpha} = \frac{\text{vel corrida}}{\text{vel natação}}$ .)

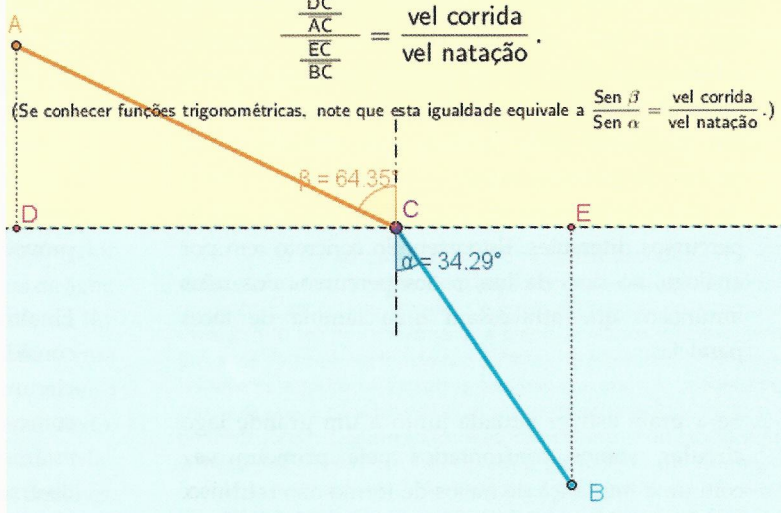


Figura 1

Na segunda parte, será explicado com algum detalhe o fenómeno do arco-íris, depois de ser analisado com minúcia o que acontece a um raio de luz branca quando encontra uma gota de água no ar.

Comecemos por ver brevemente alguns exemplos de tópicos que poderiam hipoteticamente ser incluídos num curso de pós-graduação para nadadores salvadores... (cf [2])

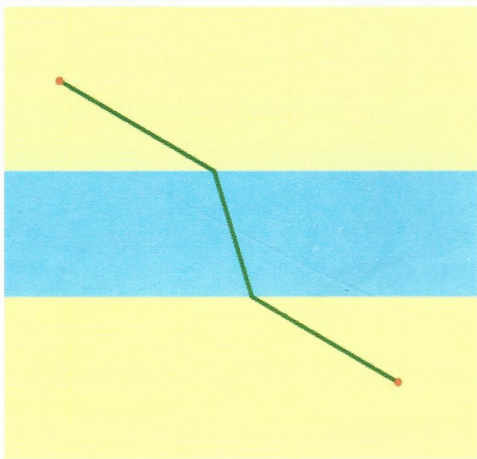


Figura 2

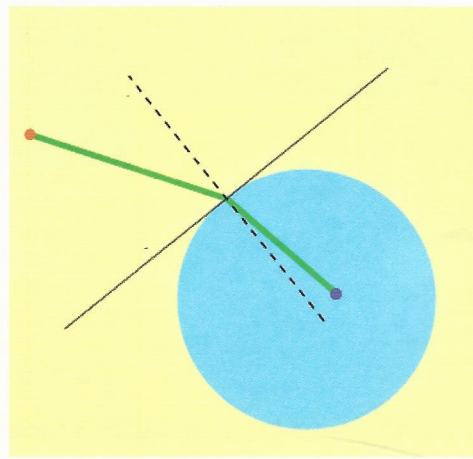


Figura 3

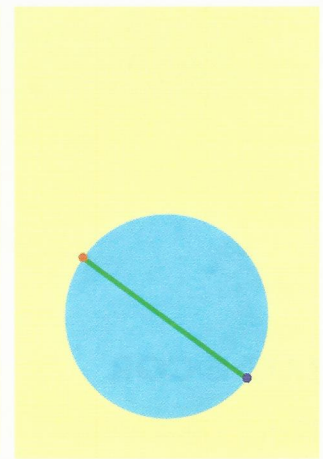


Figura 4

1. Se a praia for fluvial e a assistência só for prestada a partir de uma das margens, poderá ser útil o nadador-salvador conhecer o melhor caminho a seguir para socorrer um banhista, que, na outra margem, se sinta indisposto após um banho... A figura 2 é obtida a partir de uma aplicação interativa que trata este caso (supondo o rio com margens retilíneas paralelas e sem qualquer corrente naquele momento) e que o leitor pode utilizar a partir de [3]. Em particular, pode verificar que nadadores que nadem, proporcionalmente à velocidade de corrida, de modo mais veloz do que outros deverão seguir percursos diferentes. Este exemplo concreto tem por análogo, no caso da luz, o dos percursos dos raios luminosos que atravessam uma lâmina de faces paralelas.
2. Se a praia estiver situada junto a um grande lago circular, somos confrontados pela primeira vez com uma mudança de meios de forma não retilínea. Quando a curva de separação dos meios (neste caso, uma circunferência) tem uma tangente em cada ponto (portanto, também uma normal), podemos aplicar a condição anteriormente encontrada<sup>1</sup>, mas expressa relativamente a estas normais, agora com direção variável (ver figura 3)<sup>2</sup>.
3. Imaginando agora um enorme lago, com uma espécie de cunha entrando pela terra (ver figura 5), se a praia estiver numa das margens dessa cunha, como tratar o problema análogo ao primeiro da lista, nesta nova

situação? Este problema corresponde ao estudo do prisma. A figura 6 mostra o desvio total do raio incidente, obtido por acumulação dos desvios parciais correspondentes às duas refrações sofridas; quanto ao gráfico indicado, desse desvio em função do ângulo de incidência, mostra claramente a existência de um desvio mínimo, que corresponde à posição do segmento intermédio perpendicular à bissetriz do ângulo do prisma. A figura 7 ilustra o que se passa com um raio de luz branca, composta pela justaposição de raios de várias cores elementares (com índices de refração diferentes), ao atravessar o prisma, provocando a "separação" dessas diversas cores<sup>3</sup>.

4. Finalmente, generalizando o exemplo tratado em 2., consideremos o lago delimitado por dois arcos de circunferência de raios não necessariamente iguais, e com os mesmos extremos (ver figura 8). Neste exemplo, estamos particularmente interessados em observar diversos raios partindo de um ponto, atravessando a região indicada e, eventualmente, intersetando-se após essa travessia<sup>4</sup>.

### ARCO-ÍRIS

Nesta segunda parte, vamos tentar perceber como, por vezes, em alguns dias em que se vê simultaneamente sol e chuva (ou, pelo menos, alguma zona com nebulosidade), surge um arco-íris de aspeto deslumbrante! Há uma ideia genérica sobre a razão para a formação de um arco-íris, que está mais ou menos presente em pessoas que tenham algumas noções básicas sobre os fenómenos de refração e

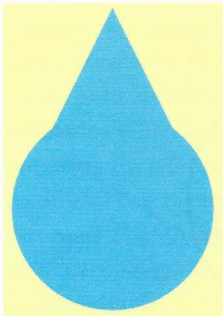


Figura 5

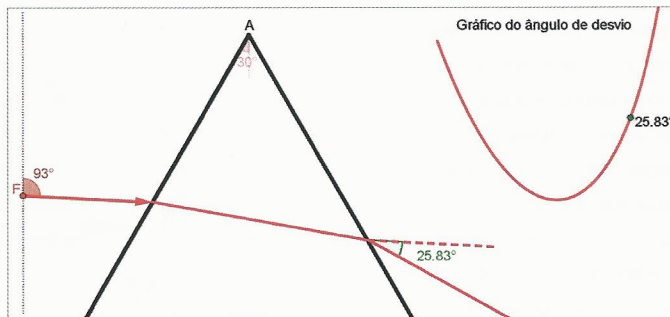


Figura 6

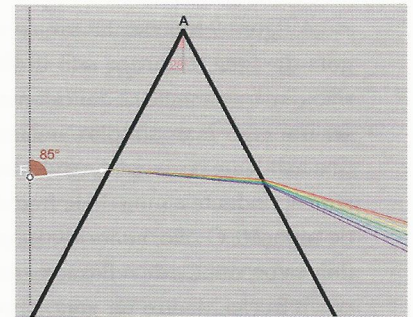


Figura 7

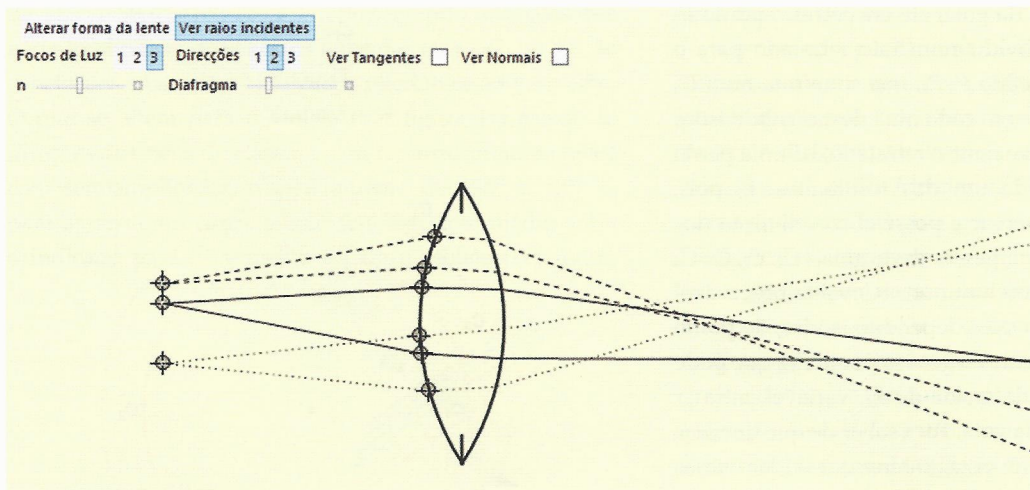


Figura 8

que, no mínimo, dominem as noções que foram evocadas na primeira parte deste texto e no texto do número anterior [1]. Essa ideia exprime-se por algo do tipo: as gotas de água existentes na atmosfera<sup>5</sup> provocam uma dispersão da luz solar branca em raios de diversas cores, de uma forma análoga à que se observa no caso do prisma, o terceiro exemplo tratado na primeira parte do presente texto. E é isso que está na base do fenômeno observado. Mas suponhamos que alguém quer conhecer mais detalhes, por exemplo: qual a razão pela qual as cores estão naquela disposição tão regular (e bela) e não noutra, por que razão os raios dos arcos de circunferência são aqueles e não outros e ainda por que razão, muitas das vezes, por fora do arco-íris forte aparece um outro, sempre exterior ao primeiro, de luzes menos intensas e com a ordem inversa das cores, relativamente à ordem das cores do mais forte.

Dado que, indubitavelmente, o arco-íris tem, de alguma forma, a ver com o efeito das gotas sobre os raios do sol que nelas incidem, é esse efeito que temos de começar por analisar em pormenor.

<sup>1</sup> A condição é a da igualdade entre a razão das velocidades nos dois meios e a razão entre os senos dos ângulos entre os dois raios e a normal no ponto. É importante lembrar que estamos à procura de pontos que minimizem o tempo relativamente a outros percursos suficientemente próximos do considerado. Isso não garante que minimizem o tempo relativamente a todos os percursos possíveis. Por exemplo, suponhamos (figura 4) que o nadador está num ponto da circunferência-margem e pretende socorrer alguém no extremo diametralmente oposto. Se seguir em linha reta, o percurso é mais rápido do que todos os que lhe estejam "suficientemente próximos". Mas basta que a razão entre a sua velocidade de corrida e de natação seja maior do que 1,5708, para haver percursos mais rápidos (porquê?).

<sup>2</sup> A figura é obtida a partir de uma aplicação interativa que o leitor pode utilizar a partir de [3].

<sup>3</sup> Para tornar mais clara a separação das cores na figura, foram considerados índices de refração um pouco mais elevados.

<sup>4</sup> Em [3] poderão ser modificados os raios e o tamanho dos arcos, bem como o tamanho de um diafragma que veda a passagem a raios muito descentrados; a observação dos efeitos dessas manipulações permite uma melhor compreensão deste modelo rudimentar de uma objetiva de uma máquina fotográfica.

<sup>5</sup> Quer sejam as gotas de água da chuva, quer sejam as gotas (em geral, bem mais pequenas) formando nuvens ou nebulosidade.

A figura 9 representa<sup>6</sup> um corte por um plano, de uma gota de água, com um raio incidente e os percursos dos raios em que aquele raio incidente se vai desdobrando. Por ser um caso mais simples, inicialmente consideraremos o raio incidente horizontal, vindo da esquerda e com uma cor correspondente a uma dada frequência e a um dado índice de refração. O raio, ao incidir na gota num ponto  $P_1$ , emite dois raios, um  $C_1$ , de reflexão para o exterior, e outro obtido por refração, dentro da gota, unindo  $P_1$  a outro ponto  $P_2$ . Chegado aí, uma parte do raio refrata-se, desta vez para o exterior num raio  $C_2$  de origem  $P_2$  e outra reflete-se em  $P_2$  na tangente ao bordo da gota, até encontrar o ponto  $P_3$  e aí novamente se subdivide num raio refratado para o exterior  $C_3$  e noutro refletido  $P_3P_4$ , que se refrata num  $C_4$  para o exterior. Claro que em cada uma destas subdivisões de um raio num refletido e noutro refratado, há uma perda de intensidade para cada um dos resultantes. É, pois, natural começar por observar a possível contribuição dos quatro primeiros raios emergentes desta gota –  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – para qualquer fenómeno luminoso relevante observável no céu. Ora, esses quatro raios dependem, todos, do ponto de impacto do raio incidente na gota (o ponto  $P_1$ ), que pode ser parametrizado pela ordenada de  $P_1$ , variável entre  $-r$  e  $r$ , designando  $r$  o raio da gota. Para saber de que direções é vista a gota, e como é vista, interessa estudar várias questões.

Primeiro que tudo, devemos determinar quais as direções varridas por cada um dos quatro raios emergentes, quando o parâmetro do ponto de impacto percorre o seu intervalo de variação. E também interessa saber se há, nestes "arcos de direção", e para alguma das quatro categorias contempladas, zonas em que se concentrem com maior intensidade os raios emergentes da gota, dando assim azo a direções com uma maior intensidade luminosa. Além disso, se tudo o que até aqui foi feito para um raio de uma cor simples, correspondente a uma frequência específica, com um índice de refração bem definido, for repetido para outra cor simples, que relação há entre os anteriores arcos das direções e os dos novos raios emergentes? Obtidas as conclusões relativas a estas questões, haverá que as aplicar à situação real que nos interessa: a de um raio solar, que é uma mistura de raios de diversas cores, com índices de refração diferentes uns dos outros.

A figura 10 mostra pontos em circunferências-horizonte representando direções dos raios emergentes da gota. Para os raios refletidos  $C_1$ , nada depende da cor e há uma repartição de direções pela circunferência-horizonte, com uma rarefação maior do lado direito, junto ao eixo de

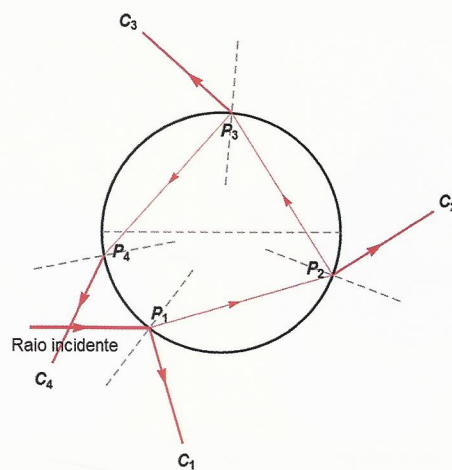


Figura 9

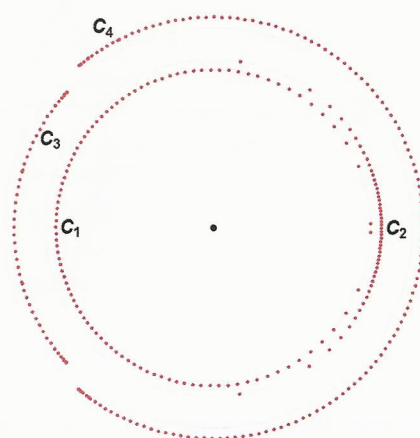


Figura 10

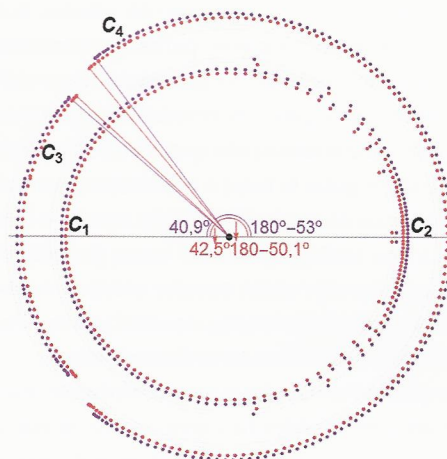


Figura 11

simetria horizontal da gota, o que é natural, porque essa região corresponde a reflexões rasantes pela parte de cima e pela parte de baixo da gota. Quanto aos primeiros raios refratados ( $C_2$ ), dirigem-se para a direita, sobretudo mais próximos do referido eixo, portanto, não muito afastados da direção dos raios incidentes na gota. Restam as direções dos raios  $C_3$  e  $C_4$ , representadas por pontos situados em dois arcos, respetivamente, na parte esquerda com uma semi-amplitude de cerca de  $42,5^\circ$  e na parte direita com uma semi-amplitude de  $129,9^\circ$ . Ficam ainda a sobrar dois pequenos arcos para a esquerda, entre as semi-amplitudes de  $42,5^\circ$  e  $50,1^\circ (=180-129,9^\circ)$ , representando direções que não são obtidas por nenhuns raios de classes  $C_3$  ou  $C_4$ . As conclusões e os valores indicados referem-se ao vermelho. O que se altera para o violeta (ver figura 11) é que, às direções dos raios de classes  $C_3$  ou  $C_4$  correspondem arcos com semi-amplitudes, respetivamente de  $40,9^\circ$  e  $127^\circ$  e, para as restantes cores, passar-se-á algo intermédio entre o indicado para o vermelho e para o violeta (ver figura

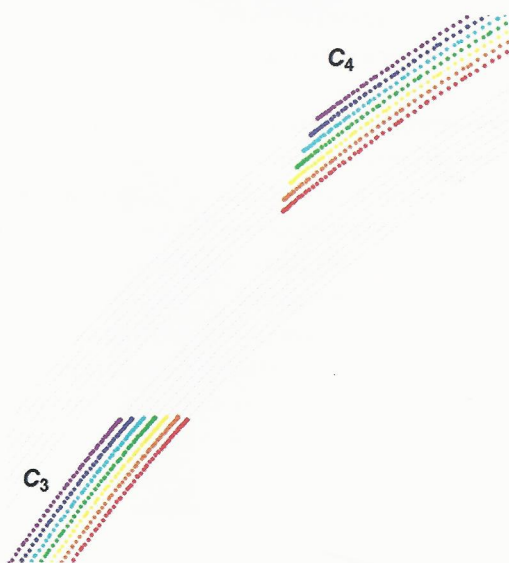


Figura 12

12 com uma ampliação da zona próxima das direções extremas para o vermelho). Em particular, os pequenos arcos entre os extremos vermelhos das direções de  $C_3$  e de  $C_4$ , para cima e para baixo do eixo horizontal, representam direções que não são obtidas para nenhum raio de classe  $C_3$  ou  $C_4$ , seja qual for a cor.

Da lista de questões atrás enunciada, falta analisar duas: i) haverá zonas em que se concentrem com maior intensidade os raios emergentes da gota e, a existirem, dependerão da cor? ii) como aplicar as conclusões à situação real que nos interessa: a dos raios solares, que são uma mistura de raios de diversas cores?

Começando por i), uma observação atenta da figura 12 parece sugerir que, para cada uma das cores, há uma concentração maior de raios  $C_3$  e  $C_4$  nas extremidades dos arcos de direções. Analisemos as variações das direções dos raios refratados (de classes  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$ ) em função do ponto de impacto na gota, para vermos se se nota algo que confirme esta observação. A figura 13 mostra, para dois feixes de raios incidentes, um na zona intermédia e outro junto a uma das direções extremas, os trajetos dos raios  $C_3$  na gota, as direções finais, as zonas correspondentes no gráfico da função que a cada parâmetro de impacto associa a direção do raio  $C_3$  e um zoom junto a uma das direções extremas. Na figura 14 estão reunidos só os três gráficos em função do fator de impacto, para  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  em vermelho. O primeiro, relativo a  $C_2$ , representa uma função crescente, não havendo nenhum ângulo (ordenada no gráfico) com uma concentração muito mais elevada de direções de raios emergentes. O declive maior, junto aos dois extremos do domínio da função, corresponde à maior rarefação de raios nas direções correspondentes. Mas em cada um dos outros

<sup>6</sup> Esta imagem e todas as seguintes, excetuando as fotografias, provêm de aplicações interativas que o leitor é vivamente aconselhado a manipular em [4].

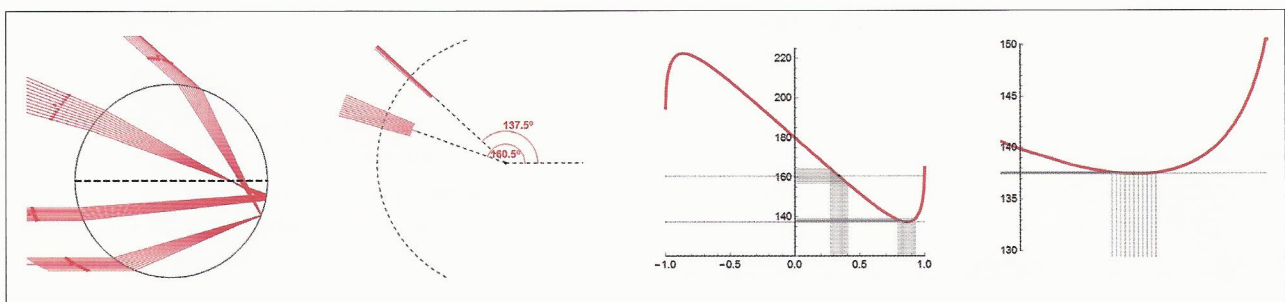


Figura 13

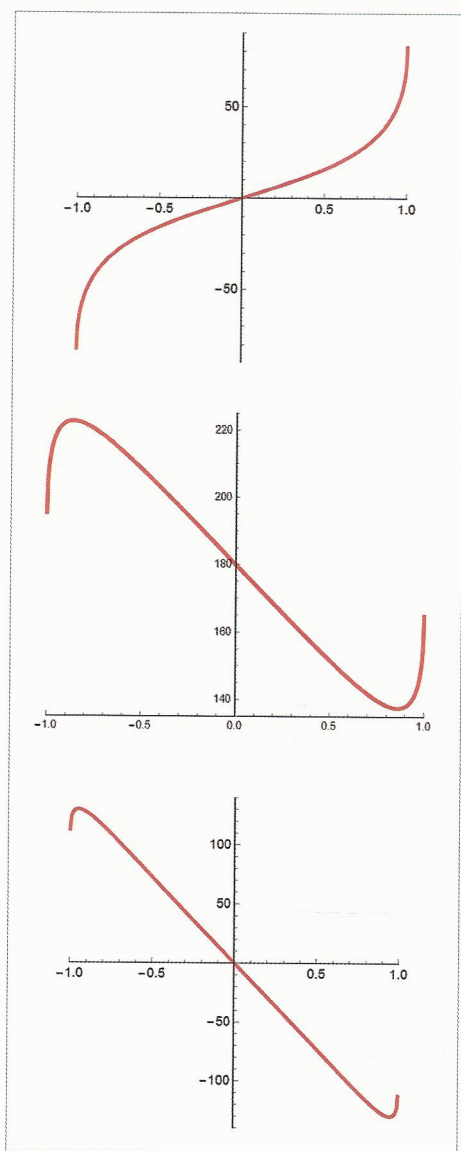


Figura 14

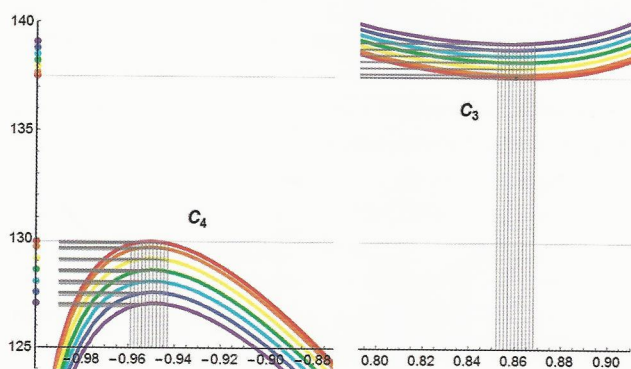


Figura 15

casos ( $C_3$  e  $C_4$ ), há um máximo e um mínimo (absolutos) da respectiva função, em pontos interiores ao domínio, e isso leva a que em toda uma vizinhança de cada um dos respectivos pontos de impacto, todos os raios emergentes saiam com direções muito próximas umas das outras (respectivamente do máximo e do mínimo), isso provocando uma zona (vermelha) excepcionalmente brilhante, precisamente nos extremos dos arcos representativos das direções (para  $C_3$  e  $C_4$ ). Algo análogo acontece para as outras cores, sendo os valores dos ângulos (máximos e mínimos) diferentes para as diversas cores, como se pode observar na figura 15. Este pormenor faz com que, ao aplicarmos o que acabamos de referir à situação concreta que nos interessa, de um raio solar – constituído por uma mistura de raios de diversas cores – tenhamos zonas de brilho (de diferentes cores), que não se sobrepõem<sup>7</sup>. Como fica claro da análise da figura 15, os ângulos das direções "brilhantes" para as outras cores estão compreendidos entre os do vermelho e os do violeta (entre  $137,5^\circ$  e  $139,1^\circ$  para  $C_3$  e entre  $127^\circ$  e  $129,9^\circ$  para  $C_4$ ). Na faixa horizontal entre o vermelho de  $C_3$  ( $137,5^\circ$ ) e o vermelho de  $C_4$  ( $129,9^\circ$ ) não há nenhum raio (de classe  $C_3$  ou  $C_4$ ) de nenhuma cor emergindo nessa direcção. Quanto às outras direcções, o que sucede genericamente é que, para cada raio emergente de uma dada cor, há um outro raio emergente de outra cor, com a mesma direcção, proveniente de outro ponto de impacto. O balanço global, para os raios emitidos pela gota nessas outras direcções, é, pois, o de uma luz branca sem zonas de particular brilho<sup>8</sup>.

Até aqui, temos trabalhado no plano, com um corte da gota e os raios do sol no plano, horizontais, vindos da esquerda. Esta representação foi suficiente para proceder ao estudo de todos os aspetos essenciais, relacionados com o que acontece aos raios incidentes na gota. A passagem deste modelo para um tridimensional, de uma gota esférica no espaço, não oferece nenhuma dificuldade. Basta imaginar o que se obtém do modelo plano, rodando no espaço, em torno da reta horizontal passando pelo centro da gota. Por razões de simetria, todas as construções feitas no plano conduzem a construções válidas no espaço. As figuras 16 e 17 representam alguns dos aspetos atrás considerados, mas agora vistos para o modelo tridimensional. A primeira mostra os percursos de alguns raios incidindo em diversos pontos da superfície da gota, num par de visão estereoscópica para os leitores que não necessitam de prismas. A outra mostra na superfície esférica do horizonte, centrada na gota e parcialmente aberta, os pontos correspondentes às direcções dos raios de classe  $C_3$  e  $C_4$ , com os pontos luminosos das cores correspondentes a "cada

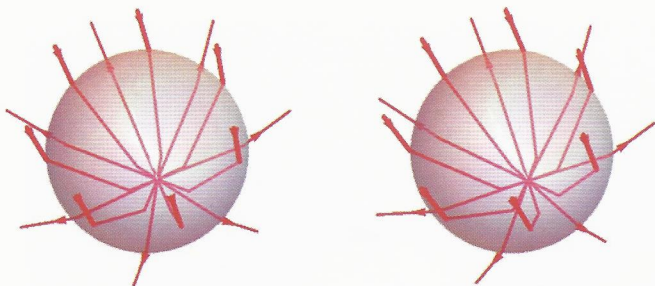


Figura 16

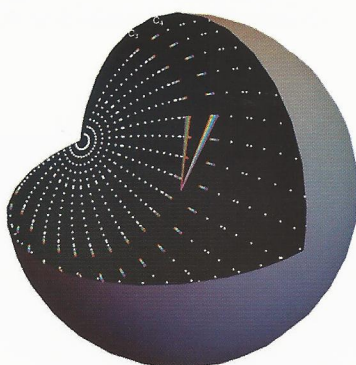


Figura 17

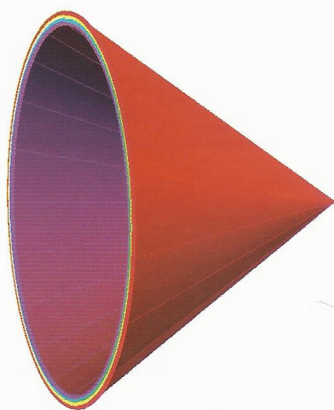


Figura 18

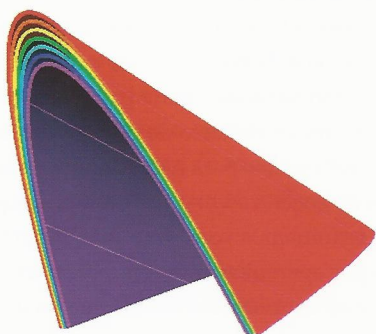


Figura 19

direção brilhante", pondo em evidência a zona escura entre as duas regiões.

Será agora útil dar uma resposta à seguinte questão: de que pontos é que esta gota é vista e como é que é vista de cada um deles?

Pelas razões de simetria atrás referidas, as soluções obtêm-se das do caso do plano, aplicando todas as rotações referidas. Por exemplo, para a cor vermelha havia duas direções brilhantes para os raios  $C_3$  às quais vai agora corresponder no espaço uma superfície cônica de vértice no centro da gota e mesma semiabertura ( $42,5^\circ$ ), de revolução em torno da reta unindo o centro da gota ao centro do sol. É para observadores situados numa tal superfície cônica, e só para esses, que os raios  $C_3$  emitidos daquela gota são vistos com a cor vermelha brilhante. De modo análogo para os raios  $C_3$  de outras cores, agora em superfícies cônicas *dentro* da vermelha, como mostram as figuras 18 e 19, esta última com uma ampliação de uma parte da anterior, apenas representando sete cores e omitindo todas as intermédias, para maior clareza. Para os raios  $C_4$ , funciona algo de análogo, mas agora com cones exteriores aos primeiros e repetindo as cores, mas por ordem invertida. A figura 20 dá uma ideia de conjunto e a figura 21 mostra um detalhe.

A seguinte pergunta surge naturalmente: se fixarmos um desses observadores situados naquela superfície cônica e que vê a tal gota de vermelho brilhante, onde se encontrarão todas as (outras) gotas (iluminadas pelo sol) que são vistas em vermelho nas mesmas condições, por esse observador em particular? A condição é a de que o ângulo de vértice no centro de cada uma dessas gotas, entre a direção do sol e a direção do observador, seja  $42,5^\circ$ , mas esse ângulo é precisamente igual ao ângulo de vértice no observador, entre a semirecta (variável) unindo o observador a cada uma dessas gotas e a semirecta (fixa) partindo do sol em direção ao observador... Portanto, o observador, de costas voltadas para o sol, vê como vermelhas todas as gotas iluminadas pelo sol que estejam no cone centrado no observador, tendo como eixo uma reta com a direção dos raios solares e como semiabertura o ângulo de  $42,5^\circ$ . Na figura 22 está representado um tal cone

<sup>7</sup> São estas que vão estar na origem do arco-íris ( $C_3$ ) e do arco-íris secundário ( $C_4$ ), como veremos.

<sup>8</sup> Por razões de simplicidade, não temos em conta outros fenómenos luminosos ligados ao arco-íris, cuja explicação requer considerações (de natureza ondulatória) mais sofisticadas do que os fenómenos de refração que aqui apresentámos. O leitor interessado pode consultar [6], que é também uma boa referência para este texto do Atractor.

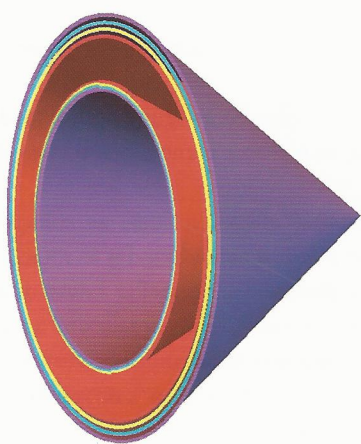


Figura 20

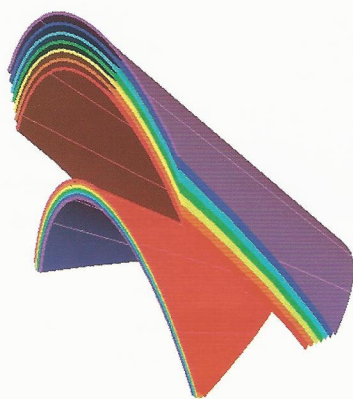


Figura 21

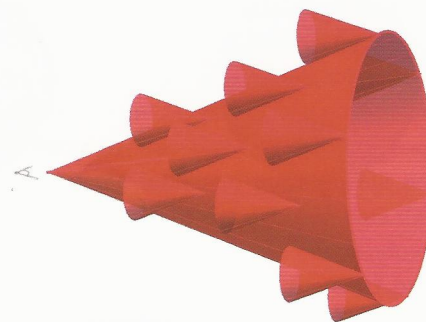


Figura 22

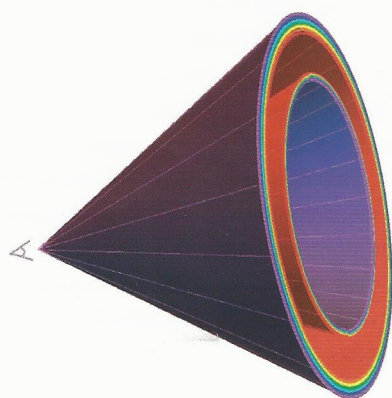


Figura 23

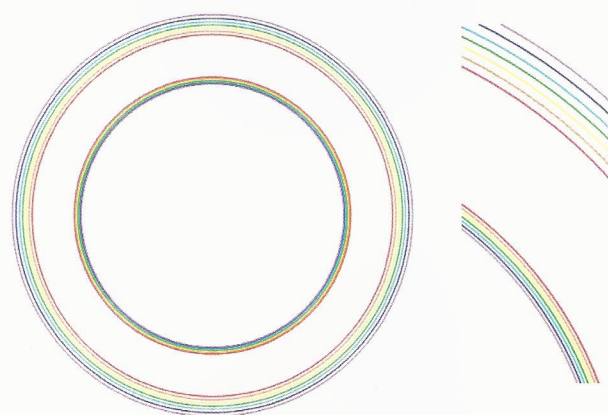


Figura 24

de observador de gotas vistas como vermelhas e vários cones de vértices em gotas vistas como vermelhas, todos eles tangentes ao grande. O que foi feito para o vermelho pode ser repetido para raios  $C_3$  de outras cores, obtendo-se assim vários cones de menores aberturas e outras cores, dentro do vermelho que começámos por considerar. E conclusões análogas podem ser expressas a partir do que foi visto, agora para as direções dos raios de classe  $C_4$ , conduzindo a cones de maior abertura, com o mesmo eixo dos anteriores, sendo desta vez o vermelho o de menor semi-abertura ( $50,1^\circ$ ) entre todos os  $C_4$ . O conjunto desses cones, todos tendo como eixo a reta que une o sol ao observador, está representado na figura 23, mostrando a figura 24: i) a distribuição de algumas das cores que o observador deveria ver, nas melhores condições: um conjunto de

círculos coloridos concêntricos (com centro na sombra do observador, produzida pelo sol); e ii) uma ampliação de uma parte. Sugere-se a comparação daqueles círculos com uma fotografia aérea existente em [5]. De Terra, é possível ver arcos-íris quase inteiros a partir de cumos de montanhas, mas, em geral, temos de nos contentar com partes do arco superior, com a concavidade virada para baixo (ver figuras 25 e 26). A razão reside no facto de os raios das superfícies cónicas anteriores virados para baixo atingirem a superfície terrestre antes de encontrarem gotas iluminadas pelo sol.

Dito isto, terminamos com uma foto (figura 27)<sup>9</sup> algo perturbadora por aparentemente contradizer as conclusões e as fundamentações apresentadas! Ela mostra um pequeno arco colorido, que relativamente ao observador é visível quase na vertical e do lado do sol, além disso tendo a



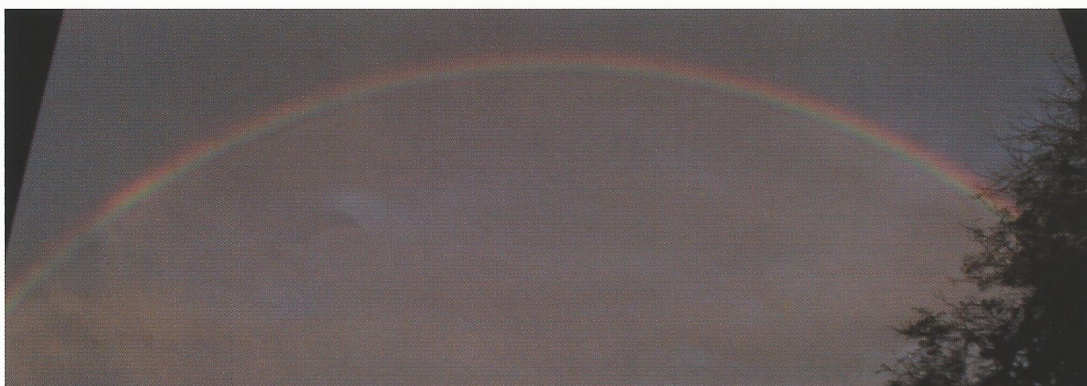


Figura 25

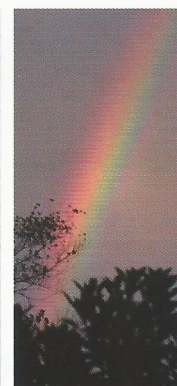


Figura 26

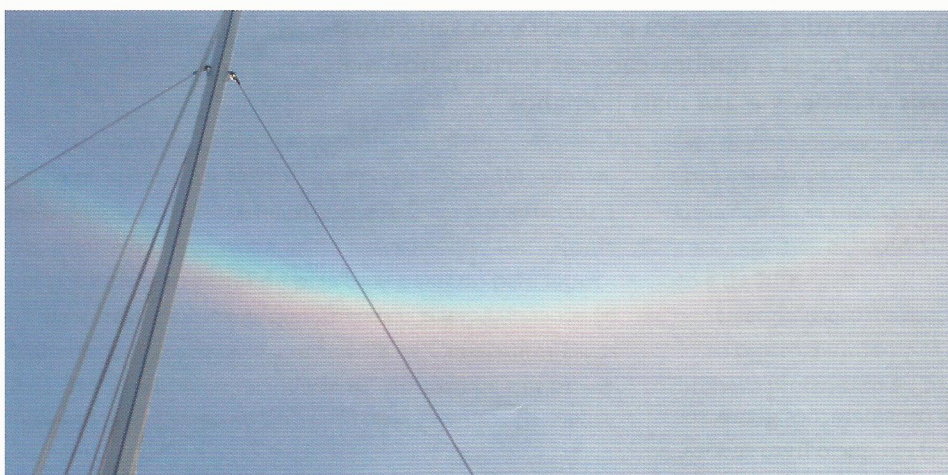


Figura 27

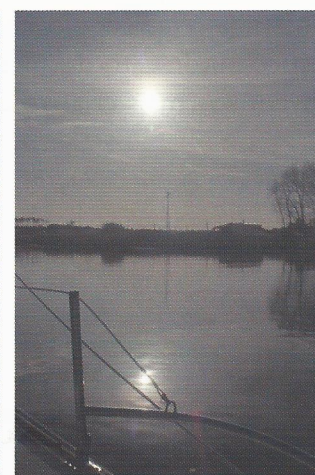


Figura 28

concauidade virada para cima – tudo ao contrário do que acima se diz! Para encontrar a explicação deste fenómeno, é útil observar com atenção uma fotografia do sol em contraluz direto, tirada na mesma ocasião (figura 28). Não há praticamente qualquer aragem, a superfície da água está espelhada e nota-se claramente o reflexo forte do sol na água. É essa luz refletida e não a luz direta do sol a causadora do fenómeno fotografado e, assim sendo, é fácil verificar que tudo está de acordo com a adaptação das considerações anteriores a esta situação especial!

<sup>9</sup> Foi tirada na ria de Aveiro, junto ao Torrão do Lameiro, em 26 de outubro de 2014.

## REFERÊNCIAS

- [1] [www.atractor.pt/mat/luz1](http://www.atractor.pt/mat/luz1)
- [2] [www.atractor.pt/mat/luz2](http://www.atractor.pt/mat/luz2)
- [3] [www.atractor.pt/mat/luz2/praiasdiversas.html](http://www.atractor.pt/mat/luz2/praiasdiversas.html)
- [4] [www.atractor.pt/mat/luz2/arcoiris.html](http://www.atractor.pt/mat/luz2/arcoiris.html)
- [5] [apod.nasa.gov/apod/ap140930.html](http://apod.nasa.gov/apod/ap140930.html) Fotografia aérea de arco-íris circular
- [6] Nussenzweig, H. Moysés. "The Theory of the Rainbow". *Scientific American*, Vol. 236-No.4 (1977-April), 116-127