

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu site www.atorator.pt. Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para atorator@atorator.pt

ADIVINHAS COM NÚMEROS

Como se constrói uma adivinha?

Comecemos por recordar uma adivinha com números, utilizada frequentemente: o "adivinho" pede a alguém para pensar num número natural até 63, mostra seis cartões com números até 63 (ver figura 1) e pergunta à pessoa em quais dos cartões encontra o número em que pensou. De posse desta informação, imediatamente "adivinha" qual o número pensado.

À partida, o leitor poderá estar numa das seguintes situações: 1) conhecendo ou não a adivinha, não faz ideia de como foi possível descobrir o número¹; 2) conhece uma regra que permite descobrir o número, mas não sabe por que

razão funciona nem saberia como arranjar um conjunto maior de cartões, cada um eventualmente com mais números, de modo a alargar o leque dos números a adivinhar.

Se o leitor não está em nenhuma destas duas categorias e sabe como e por que razão funciona a adivinha, sugerimos que procure criar uma adivinha análoga que permita adivinhar um leque mais alargado de números com menos cartões.

¹ Estamos a supor que o leitor não acredita em poderes sobrenaturais do adivinho.



Figura 1

Entretanto, começamos por nos dirigir aos leitores na situação 1. Notemos primeiro que, para ser possível deduzir qual o número pensado, é necessário que não haja dois números distintos que estejam exatamente nos mesmos cartões: se se escolher um número qualquer e se se procurar os cartões em que ele se encontra (por exemplo, 53 nos cartões 1, 3, 5, 6) não há nenhum outro número que esteja nesses cartões e só nesses. Procure agora encontrar uma relação entre um número pensado (por exemplo, 34) e os números mais pequenos de cada um dos cartões em que ele se encontra. Se conseguir, veja se ela ainda se aplica quando pensa noutros números. Terá porventura encontrado a regra utilizada pelo adivinho e estará então em condições de testar a adivinha com outras pessoas.

Antes de procurarmos a razão pela qual o processo funciona, tentemos usar três novos cartões, agora com números escritos em duas cores (ver figura 2). Pensemos num número de 1 a 26, por exemplo, 19, e, para cada um dos cartões em que ele se encontra – naquele exemplo do 19, no primeiro cartão em preto e no terceiro em verde – tomemos nota do menor número no cartão que tem a mesma cor do pensado. Que relação há entre esses diversos números mais pequenos e o pensado inicialmente? Façamos agora o mesmo para os três cartões de 1 a 63 representados na figura 3, mas agora com números em três cores

diferentes. Por exemplo, o número 56 está nos cartões 2 e 3, respetivamente com cores verde e azul. E, nesses cartões, os menores números das mesmas cores são 8 e 48. Ora, $56 = 8 + 48$. Como é que foram escolhidos os cartões de modo que esta regra tão simples para adivinhar o número funcione? Antes de responder a esta pergunta, vejamos um outro caso que só não constitui uma boa adivinha porque toda a gente percebe logo o raciocínio que está a ser feito. Suponhamos que queremos "adivinhar" um número entre 0 e 99. Claro que nos basta conhecer o algarismo das dezenas e o das unidades para conhecer o número! E se dispusermos de nove cores, podemos fazer corresponder uma cor diferente a cada um dos algarismos não nulos. Então, construímos um cartão que nos permita descobrir o algarismo das unidades e outro que nos permita descobrir o das dezenas. Por exemplo, nos dois cartões da figura 4, o que é que há em comum a todos os números representados a lilás no primeiro cartão? É terem o algarismo das unidades igual a 7. E todos os números representados a castanho no segundo cartão têm o algarismo das dezenas igual a 9. Portanto, quando uma pessoa diz que pensou num número que está no primeiro cartão com a cor lilás e no outro cartão a castanho, está a revelar que pensou no número com o algarismo 7 das unidades e o algarismo 9 das dezenas, ou seja, no número $7 + 9 \times 10 = 97$ (note-se que 7 é

1	2	4	5	7	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13
8	10	11	13	14	8	12	13	14	15	14	15	16	17	18
16	17	19	20	22	16	17	21	22	23	19	20	21	22	23
23	25	26			24	25	26			24	25	26		

Figura 2

1	2	3	5	6	7	4	5	6	7	8	9	16	17	18	19	20	21
9	10	11	13	14	15	10	11	12	13	14	15	22	23	24	25	26	27
17	18	19	21	22	23	20	21	22	23	24	25	28	29	30	31	32	33
25	26	27	29	30	31	26	27	28	29	30	31	34	35	36	37	38	39
33	34	35	37	38	39	36	37	38	39	40	41	40	41	42	43	44	45
41	42	43	45	46	47	42	43	44	45	46	47	46	47	48	49	50	51
49	50	51	53	54	55	52	53	54	55	56	57	52	53	54	55	56	57
57	58	59	61	62	63	58	59	60	61	62	63	58	59	60	61	62	63

Figura 3

o menor número do primeiro cartão com a mesma cor de 97, e 90 é o menor número do outro cartão com a mesma cor de 97). Não estar num cartão significa que o algarismo correspondente (das unidades ou das dezenas) é nulo e neste caso nada há a somar (respetivamente ao nível das unidades ou das dezenas). Por exemplo, o único número que só está no segundo cartão e nesse está representado a castanho é o 90. Na situação que acabamos de descrever com números de 0 a 99 e dois cartões com nove cores, o efeito da adivinha como tal é nulo, porque ninguém se espantará que, fornecendo-se informação sobre os dois algarismos de um número até 99, se saiba qual é o número! E não é difícil imaginar como construir três cartões análogos com números de 0 a 999.

Se este exemplo foi referido, foi porque ele é represen-

tativo do que se passa em todos os outros casos vistos antes e permite compreender melhor a razão do funcionamento da regra já verificada para eles. Consideremos o caso da figura 3, em que havia três cores. Para três cores darem informação sobre os algarismos não nulos, devemos tomar 4 como base. Então, escrevamos em base 4 os números dos três cartões de três cores representados na figura 3. Obtemos os cartões representados na figura 5 e podemos observar que no primeiro cartão estão os números com algarismos das unidades 1, 2 e 3, respetivamente a preto, verde e azul. No segundo estão aqueles cujos algarismos das “dezenas” são 1, 2 e 3, nas cores correspondentes, e analogamente para o terceiro cartão e os algarismos das “centenas”. Então, no exemplo atrás indicado em que dispúnhamos da informação de que o número estava nos car-

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
11	12	13	14	15	16	17	18	19	19	20	21	22	23	24	25	26	27
21	22	23	24	25	26	27	28	29	28	29	30	31	32	33	34	35	36
31	32	33	34	35	36	37	38	39	37	38	39	40	41	42	43	44	45
41	42	43	44	45	46	47	48	49	46	47	48	49	50	51	52	53	54
51	52	53	54	55	56	57	58	59	55	56	57	58	59	60	61	62	63
61	62	63	64	65	66	67	68	69	64	65	66	67	68	69	70	71	72
71	72	73	74	75	76	77	78	79	73	74	75	76	77	78	79	80	81
81	82	83	84	85	86	87	88	89	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Figura 4

1	2	3	11	12	13	10	11	12	13	20	21	100	101	102	103	110	111
21	22	23	31	32	33	22	23	30	31	32	33	112	113	120	121	122	123
101	102	103	111	112	113	110	111	112	113	120	121	130	131	132	133	200	201
121	122	123	131	132	133	122	123	130	131	132	133	202	203	210	211	212	213
201	202	203	211	212	213	210	211	212	213	220	221	220	221	222	223	230	231
221	222	223	231	232	233	222	223	230	231	232	233	232	233	300	301	302	303
301	302	303	311	312	313	310	311	312	313	320	321	310	311	312	313	320	321
321	322	323	331	332	333	322	323	330	331	332	333	322	323	330	331	332	333

Figura 5

1	2	11	12	21	10	11	12	20	21	100	101	102	110	111		
	22	101	102	111	112	120	110	111	112	120	112	120	121	122	200	
121	122	201	202	211			121	122	210	211	212	201	202	210	211	212
212	221	222					220	221	222			220	221	222		

Figura 6

tões 2 e 3, respetivamente com as cores verde e azul, isso diz-nos que o algarismo das “dezenas” é 2 e o das “centenas” é 3, significando o facto de o número não estar no primeiro cartão que o algarismo das unidades é 0. Ou seja, trata-se do número 320_4 que se escreve como 56 na base 10 ($= 3 \times 4^2 + 2 \times 4^1 + 0$). Analogamente, para obter os cartões da figura 2, com apenas duas cores, usámos a descrição em base 3 (na qual o número de algarismos não nulos é igual ao número – 2 – de cores disponíveis). Na figura 6 estão representados cartões com os mesmos números que na figura 2, mas agora escritos na base 3.

Ao dizer-se que o número aparece no primeiro cartão a preto e no terceiro a verde, está a dar-se a informação de que o algarismo das unidades é 1 e o das “centenas” é 2, sendo o das “dezenas” 0 por o número não aparecer no segundo cartão. Ou seja, o número é 201_3 (em base decimal $19 = 2 \times 3^2 + 1$). Analogamente para a adivinha tradicional, com os cartões da figura 1, em que só há algarismos de uma cor: dizer se está ou não num cartão é dizer se em base 2 o algarismo de ordem correspondente é 1 ou 0. O leitor pode observar a figura 7 com os cartões análogos aos da figura 1, mas com os números agora escritos em base 2.

No primeiro cartão estão os números cujo algarismo das unidades em base 2 é 1, no segundo, aqueles cujo algarismo das “dezenas” é 1, etc. Por exemplo, o número que está só no segundo e no último cartão será 100010_2 (em base decimal $2^5 + 2^1 = 34$).

O leitor que desejar ver outros cartões com diversos números de algarismos e de cores, escritos em base 10 ou na base adequada ao número de cores desejado, pode consultar [1]. Aí encontrará também vários PDFs com algumas coleções de cartões prontos a ser impressos em formato A4, inclusive um deles algo diferente dos restantes, por usar uma forma pouco usual de representar os números, no chamado sistema ternário equilibrado. Em [2] o leitor poderá consultar outros *Truques e Magias* relacionados com adivinhas com números.

REFERÊNCIAS

[1] www.atractor.pt/mat/adivinhascomnumeros

[2] Estefani M. Moreira e Jorge Picado, "Truques e Magia com códigos algébricos", *Gazeta de Matemática*, n.º 175.

1	11	101	111	1001	1011	1101
1111	10001	10011	10101	10111	11001	11011
11101	11111	100001	100011	100101	100111	101001
101011	101101	101111	110001	110011	110101	110111
111001	111011	111101	111111			

100	101	110	111	1100	1101	1110
1111	10100	10101	10110	10111	11100	11101
11110	11111	100100	100101	100110	100111	101100
101101	101110	101111	110100	110101	110110	110111
111100	111101	111110	111111			

10000	10001	10010	10011	10100	10101	10110
10111	11000	11001	11010	11011	11100	11101
11110	11111	110000	110001	110010	110011	110100
110101	110110	110111	111000	111001	111010	111011
111100	111101	111110	111111			

100000	100001	100010	100011	100100	100101	100110
100111	101000	101001	101010	101011	101100	101101
101110	101111	110000	110001	110010	110011	110100
110101	110110	110111	111000	111001	111010	111011
111100	111101	111110	111111			

Figura 7