

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu site [www.tractor.pt](http://www.tractor.pt).

Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para [tractor@tractor.pt](mailto:tractor@tractor.pt)

## MATEMÁTICA DOS AZULEJOS

O Atractor tem em curso um projecto de alguma dimensão com o objetivo de analisar, do ponto de vista da simetria, os painéis de azulejos das casas de uma localidade.

A parte de recolha e tratamento de dados, relativamente a Ovar (incluindo o Furadouro), está avançada e as ferramentas que foram desenvolvidas para esse tratamento poderão vir a ser aplicadas noutras localidades com azulejos. Este texto faz um ponto da situação atual.

À partida, o título *Matemática dos Azulejos* poderia levantar a questão de saber se a análise matemática "dos azulejos" foca cada azulejo individualmente ou o resultado da forma como o assentamento dos azulejos é feito numa certa zona da fachada de uma casa. Por exemplo, consideremos o azulejo<sup>1</sup> representado na figura 1, formado por um V; esse azulejo, individualmente, tem uma reflexão vertical, com eixo exatamente a meio. Mas podemos imaginar diversas formas de disposição, por exemplo as representadas nas três imagens da figura 2. Nos três casos, há simetrias de reflexão de eixos verticais passando pelo vértice do V de cada azulejo, reflexões essas provenientes da simetria existente no próprio azulejo. No segundo caso, são as únicas, e nos outros dois, há também simetrias de reflexão com eixos verticais passando pelas junções verticais

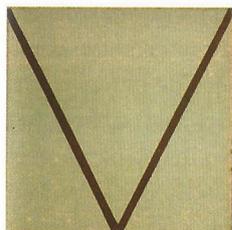


Figura 1.

dos azulejos; no terceiro caso, há ainda reflexões de eixos horizontais passando pelas junções horizontais. Nos três casos há rotações de meia-volta cujos centros são: i) no primeiro, para cada V, os meios dos seus dois segmentos e as suas projeções no lado do azulejo que contém o vértice do V; ii) no segundo, os quatro vértices de cada azulejo e os meios dos seus lados verticais; iii) no terceiro, os meios dos lados dos V (além das que resultam das reflexões).

Seria ilusório pensar



Figura 2.

<sup>1</sup>Salvo menção em contrário, os azulejos, zonas e casas representados referem-se a Ovar (incluindo o Furadouro). O leitor que não conhecer as notações referentes aos tipos de simetria de frisos e padrões pode consultar [1].

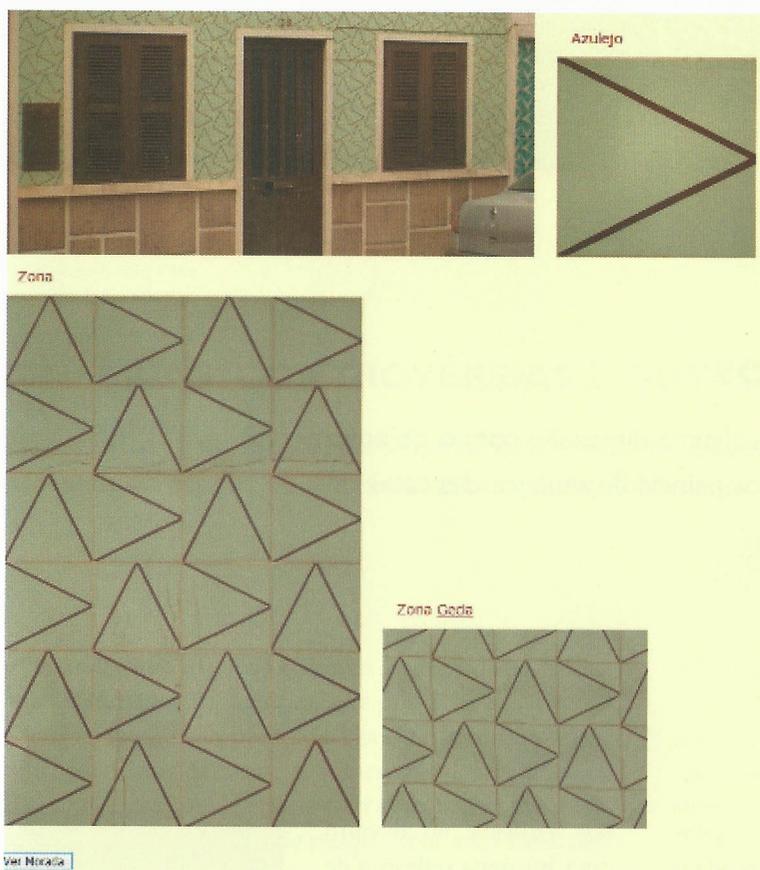


Figura 3.

que, extrapolando o que é afirmado no início do parágrafo anterior, poderíamos afirmar que a simetria de reflexão do azulejo V dá necessariamente lugar a uma simetria de reflexão do padrão que o utiliza. No Fura-douro foi encontrada uma casa com este azulejo, mas disposto de uma forma que não conduz a nenhuma simetria de reflexão: ver na figura 3 uma imagem copiada de [1] com essa casa e uma zona da sua fachada principal<sup>2</sup>. Nessa figura está representada também, em baixo à direita, uma *Zona GeClá*<sup>3</sup>. Clicando nessa imagem no portal do Atractor, o leitor poderá importá-la e utilizá-la com o GeCla para receber ajuda ao procurar as simetrias e o tipo de simetria do padrão correspondente. Estas funcionalidades estão disponíveis para todos os padrões e todos os frisos de todas as casas com azulejos, e há casas que apresentam, entre padrões e frisos, um total de cinco diferentes.

A figura 4 representa: i) um mapa de [1], obtido por um utilizador que escolheu um círculo (centro e raio) e alguns tipos de simetria, para localizar as casas nesse

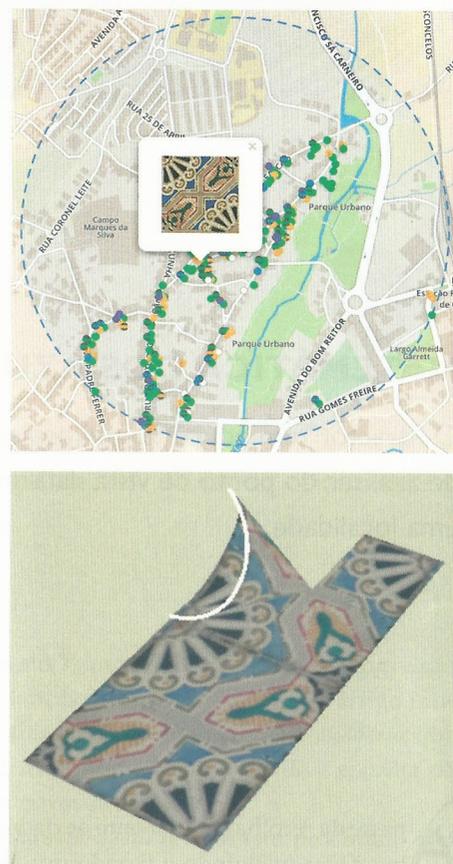


Figura 4.

círculo com azulejos desses tipos de simetria; ii) o carimbo correspondente ao azulejo da casa clicada, numa fase da animação que o mostra a carimbar o friso.

A figura 5 apresenta os 18 tipos de simetria encontrados em padrões e frisos de Ovar até esta data.

Todos os sete tipos de frisos existentes estão presentes (última linha e último elemento da penúltima) e, quanto aos 17 padrões, os cinco que admitem rotações de  $120^\circ$  (quatro no canto superior esquerdo e um no superior direito) não estão representados, como era de esperar, por ser mais natural surgirem com azulejos hexagonais. Há ainda um tipo de simetria, o último da segunda linha, que poderia perfeitamente aparecer, mas (ainda) não encontramos. Vamos dar algumas indicações sobre como proceder para o obter usando azulejos de outras casas, com disposição diferente; isso tornará fácil a tarefa de alguém que decida, usando-as, fazer com que haja brevemente em Ovar todos os tipos de simetria que se podem obter com azulejos existentes à venda.

Começemos por notar que, nos padrões com alguma



Figura 5.

simetria de reflexão, há duas situações possíveis: ou o azulejo já tem alguma simetria de reflexão e a forma de assentamento respeita-a (casos da figura 2); ou o azulejo não tem nenhuma simetria de reflexão, mas existem dois azulejos, um refletido do outro. A primeira situação é, de longe, a mais frequente. A figura 6 mostra todos os azulejos encontrados em Ovar correspondentes à segunda situação, isto é, em que, para cada azulejo, há também o seu refletido. Escolhendo um dos que não têm nenhuma simetria (qualquer diferente do primeiro e do quarto) e

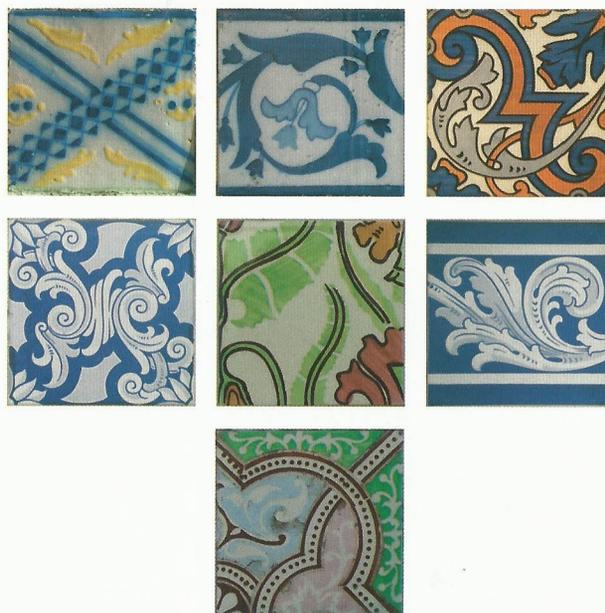


Figura 6.

<sup>2</sup>O padrão tem reflexões deslizantes e grupo de simetria  $xx$  ( $pg$ ), tendo sido encontradas até agora, entre mais de 700 casas já tratadas e referidas em [1], só mais três com padrões desse grupo, curiosamente todas elas no Furdouro. Uma é contígua à representada na figura 3 e as três usam um mesmo azulejo com forma semelhante ao dessa figura, sendo o assentamento exatamente do mesmo tipo.

<sup>3</sup>GeCla é um programa criado e distribuído gratuitamente pelo Atractor e que permite: i) produzir padrões e frisos de qualquer tipo de simetria a partir de um motivo desenhado pelo utilizador; ou contido numa imagem; ii) classificar um padrão ou friso, facilitando a pesquisa de todas as suas simetrias.

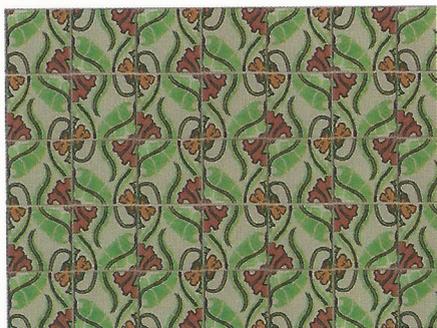


Figura 7.

usando o GeCla com essa imagem por motivo e o carimbo correspondente a  $22x$  (plano projetivo), obtemos uma zona com o tipo de simetria que (ainda) parece faltar em Ovar: ver a figura 7 obtida com o quinto azulejo.

Para construir esta zona toma-se um azulejo e coloca-se junto a cada um dos seus lados um refletido mas rodado de meia-volta. Basta, pois, dispor de pares de azulejos, refletidos um no outro.

Vejamos brevemente o caso dos cinco padrões que faltam. No DVD *Simetria - apresentação dinâmica*, criado pelo Atractor em 2009, há imagens de padrões recolhidos no Alhambra referentes a esses 5 tipos de simetria. Se houvesse azulejos hexagonais ou triangulares (equiláteros) no mercado, seria uma tarefa simples encontrar motivos para esses azulejos e com eles produzir naturalmente os cinco tipos em falta<sup>4</sup>. A figura 8 ilustra como obter dois desses cinco tipos.

Sem azulejos hexagonais, há uma solução com azulejos retangulares de proporções adequadas. Consideremos, por exemplo, o tipo de simetria  $*632$ , que tem

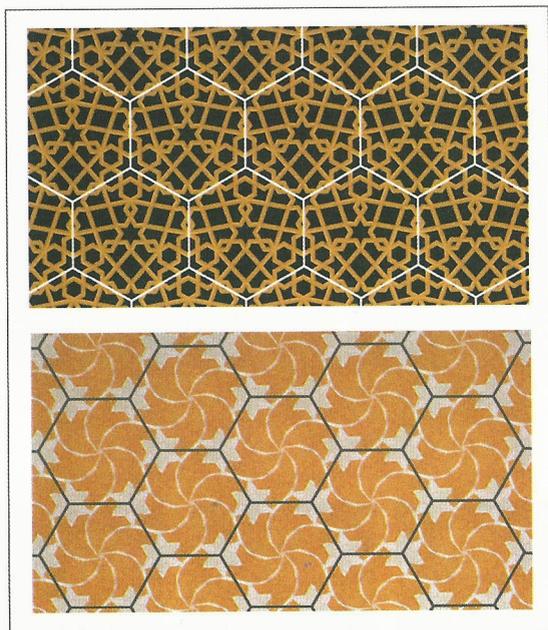


Figura 8.



Figura 10.

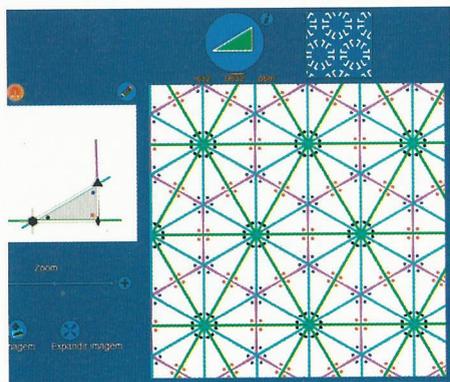


Figura 9.

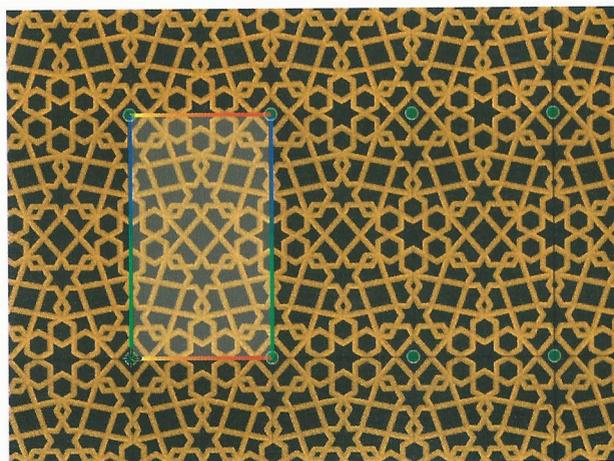


Figura 11.

como carimbo um triângulo retângulo com ângulos  $30^\circ$  e  $60^\circ$ , e suponhamos a hipotenusa de comprimento unitário (ver figura 9 criada com o GeCla). Este carimbo dá origem a redes de hexágonos regulares. Calculemos as amplitudes das translações mínimas em duas direções perpendiculares entre si. As normas dos vetores de translação são 3 para a vertical e  $\sqrt{3}$  para a horizontal, portanto a razão é  $\sqrt{3}$ . Com azulejos retangulares de lados nesta proporção, seria exequível produzir o padrão. A título de exemplo referente ao caso \*632, o azulejo representado na figura 10 permite obter o primeiro padrão do Alhambra da figura 8. Na figura 11, obtida com o GeCla, mostra-se o padrão obtido com esse azulejo; nela estão marcados os vértices dos azulejos. Numa solução destas, a concretizar-se, seria essencial que o assentamento final dos azulejos tornasse praticamente imperceptíveis as juntas entre eles e seria crucial que as proporções entre os comprimentos dos lados fossem respeitadas.

Aliás, esta questão da visibilidade ou não das juntas foi várias vezes discutida durante a realização do trabalho, visto que o grau de destaque delas é muito variável de casa para casa<sup>5</sup> e tê-las ou não em conta como parte da figura altera frequentemente a classificação do ponto de vista da simetria. Vejamos um exemplo. Vendo de longe a casa representada na imagem da esquerda da figura 12, apenas se notam umas linhas retangulares claras, tendo o padrão o tipo de simetria \*2222. Aquelas linhas correspondem às juntas dos azulejos, como se percebe ao olhar mais de perto (imagem do meio), vendo-se neste caso também o detalhe de cada azulejo. Entrando agora em conta não só com aquelas linhas mas também com o

detalhe dos azulejos (nessa imagem do meio), nem muda o tipo de simetria nem a região fundamental, que é um quarto do azulejo todo. Mas se tivermos em vista só o detalhe dos azulejos e pintarmos as juntas de uma cor próxima da do fundo do azulejo (imagem da direita) e as ignorarmos, o tipo de simetria muda para \*442, e uma região fundamental corresponde a  $1/8$  de um quadrado azul, portanto sendo 16 vezes mais pequena do que a anterior. Há, no entanto, outros casos em que as juntas dos azulejos são imperceptíveis e em que é, pois, natural ignorá-las à partida. Um caso extremo seria o de uma fachada toda com azulejos quadrados brancos, sem desenhos. Sem vermos as juntas, nem sequer temos um padrão<sup>6</sup>, mas com as juntas temos um \*442, sendo a região fundamental  $1/8$  do azulejo. Um caso em que as juntas são quase imperceptíveis é o representado na imagem da esquerda, na figura 13. Nessa figura estão também representadas: a imagem de um azulejo, tratada de forma a melhorar a qualidade do desenho; uma imagem com si-

<sup>4</sup> Seria interessante que a autarquia de uma localidade com abundância de azulejos indagasse da possibilidade de produção económica de azulejos hexagonais e promovesse a produção de tais azulejos, para vir a poder, dentro de algum tempo, incluir na informação ou num roteiro cultural a indicação de que já estavam representados na localidade todos os tipos de simetria existentes de padrões com azulejos...

<sup>5</sup> Mesmo considerando só azulejos sem relevo, a visibilidade depende da folga deixada entre azulejos e do contraste entre a cor do material de remate e a cor de fundo do azulejo (por vezes branco com azulejos de fundo escuro).

<sup>6</sup> Recorde-se que o Atractor sempre usa a palavra *padrão* no sentido de duplamente periódico.



Figura 12.

metrias assinaladas (reflexões de eixos perpendiculares entre si passando pelos centros das flores e rotações de meia-volta) e também com o carimbo resultante, um cone de bordos espelhados. Finalmente, a última imagem da figura 13 mostra o que aconteceria se as juntas tivessem sido assinaladas com destaque: desapareceriam todas as simetrias com eixos de reflexão descendentes para a direita; das crescentes para a direita, ficariam as que passam pelos cantos do azulejo e as outras dariam lugar a reflexões deslizantes: o carimbo seria uma tira de Möbius de bordo espelhado.

O gráfico de barras da figura 14 permite comparar as

frequências com que aparecem, entre os dados até agora tratados para Ovar, os diferentes tipos de simetria, desde o mais frequente (\*442 ou p4m) com 38.8% até outro (22x ou pgg) com 0%. Na coluna mais à esquerda estão indicados os 5.1% que foram classificados *sem simetria*. A figura representa o gráfico (de [1]) no momento em que se clicava na barra correspondente a \*2222 (ou pmm).

Como nota final, vejamos exemplos de casos classificados como sem simetria. Um dos primeiros encontrados foi o da figura 15, que mostra o azulejo e uma fotografia da fachada. O azulejo não tem simetria de rotação e é por isso importante o modo como ele é colocado, se se quiser

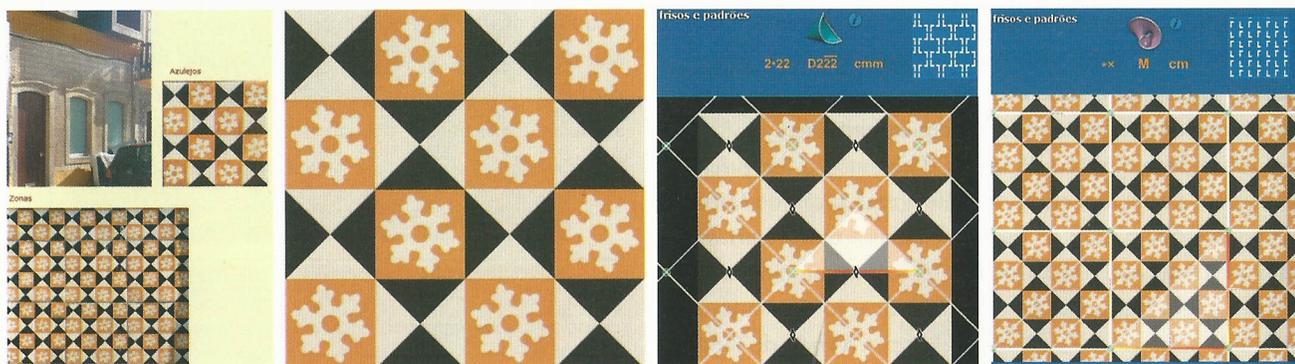


Figura 13.

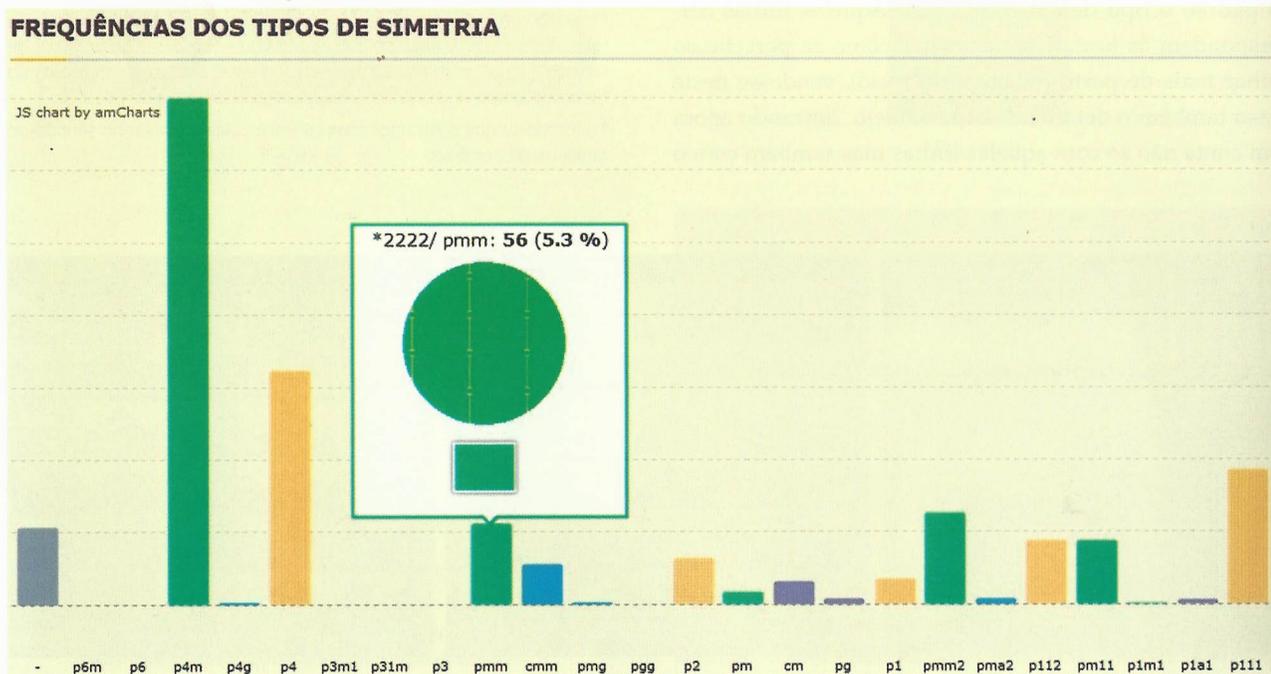


Figura 14.

produzir um padrão. Ora uma análise cuidada da fotografia mostra que o assentamento do azulejo foi aparentemente aleatório, encontrando-se a mesma região do azulejo virada para cima, para baixo, para a direita ou para a esquerda sem qualquer regra identificável. Em particular, também não foram identificadas translações que respeitem o modo de assentamento do azulejo. Outros problemas do mesmo tipo surgem, não surpreendentemente, com azulejos como os representados na figura 16. O desenho muito irregular levanta logo a questão de saber se ele varia de azulejo para azulejo. A resposta é negativa, portanto, havendo cuidado no assentamento, é possível criar padrões com vários tipos de simetria, embora essa simetria seja muito mais difícil de identificar visualmente. Mas, na verdade, nos exemplos analisados não se verificou nenhuma preocupação no assentamento, o que, aliás, é mais compreensível com imagens deste género.

Finalmente, há outro tipo diferente de zonas sem simetria: aquelas em que os azulejos são todos intencionalmente diferentes. Um muito frequente, representado na figura 17, é o formado por azulejos com um retângulo claro para o qual aparentemente foram enviados chapiscos coloridos, diferentes de azulejo para azulejo. Como essas diferenças entre os azulejos foram intencionais e não devidas a imperfeição no desenho, as zonas das fachadas foram classificadas como sem simetria: não há nenhuma translação (diferente da identidade) que não altere o aspeto da zona em questão.

O Atractor tem a intenção de, após a conclusão do tratamento dos dados existentes, acrescentar ao portal [1] algum material introdutório que facilite o eventual uso por alunos de escolas da região e sugerir alguns roteiros comentados que possam ser utilizados por visitantes com interesses culturais.

[1] [www.atractor.pt/mat/matematica\\_azulejos2](http://www.atractor.pt/mat/matematica_azulejos2)

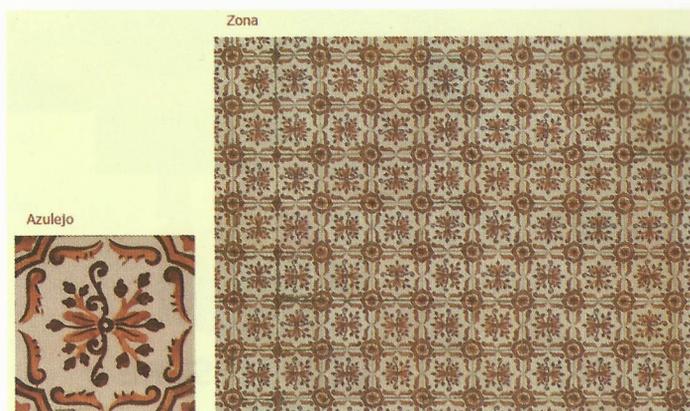


Figura 15.

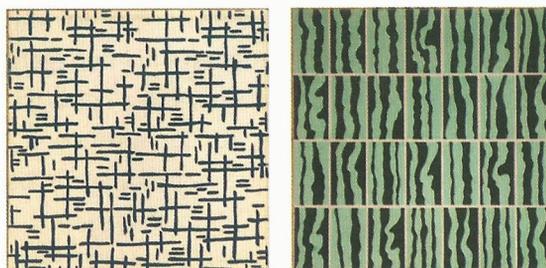


Figura 16.

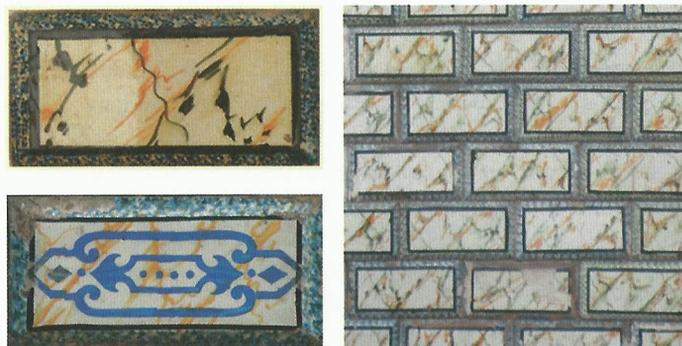


Figura 17.