

## POLINÓMIOS VS. POLÍGONOS

O método de Lill é um processo dinâmico que permite visualizar os zeros reais, se existem, de qualquer polinómio de grau positivo numa variável real. Com este método, podemos testar a existência desses zeros e analisar como eles variam com os coeficientes do polinómio. O método tem ainda a vantagem de ser fácil de implementar em computador e de se adaptar a uma abordagem interativa, como a que aqui se apresenta.

Consideremos uma equação polinomial na variável real  $x$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

com coeficientes reais  $a_n, \dots, a_0$ , sendo  $n$  um inteiro positivo e  $a_n \neq 0$ . A primeira etapa do método de Lill (cf. [2]) associa ao polinómio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

um caminho no plano feito de segmentos de reta horizontais e verticais, cujos comprimentos são determinados pelos coeficientes de  $f$ . Mais precisamente, começamos por traçar um segmento de reta  $\alpha_n$  horizontal, de comprimento  $|a_n|$ , com início no ponto  $O = (0,0)$  do plano cartesiano, dirigido para a direita se  $a_n > 0$  e para a esquerda se  $a_n < 0$ . Designemos por  $P_n$  o ponto final de  $\alpha_n$ . Se  $a_{n-1} \neq 0$ , traçamos outro segmento de reta  $\alpha_{n-1}$ , com início em  $P_n$  mas desta vez vertical, medindo  $|a_{n-1}|$  e dirigido para cima se  $a_{n-1} > 0$  e para baixo se  $a_{n-1} < 0$ . Denotemos por  $P_{n-1}$  o ponto final de  $\alpha_{n-1}$ . Se  $a_{n-1} = 0$ , este segmento  $\alpha_{n-1}$  reduz-se ao ponto  $P_n$ . Verifique-se na figura 1 estas duas etapas para os polinómios  $2x + 1$ ,  $x - 2$  e  $x$ .

Se  $n \geq 2$  e  $a_{n-2} \neq 0$ , prosseguimos com a construção anterior traçando outro segmento horizontal, digamos

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o *Atrator*, este é um espaço da responsabilidade do *Atrator*, relacionado com conteúdos interativos do seu site [www.atrator.pt](http://www.atrator.pt). Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para [atrator@atrator.pt](mailto:atrator@atrator.pt).

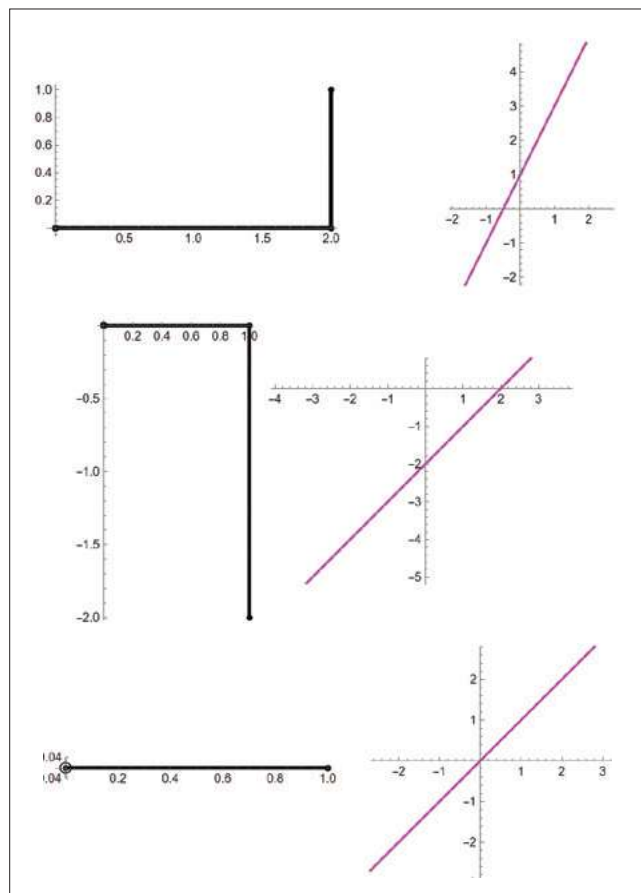


Figura 1.

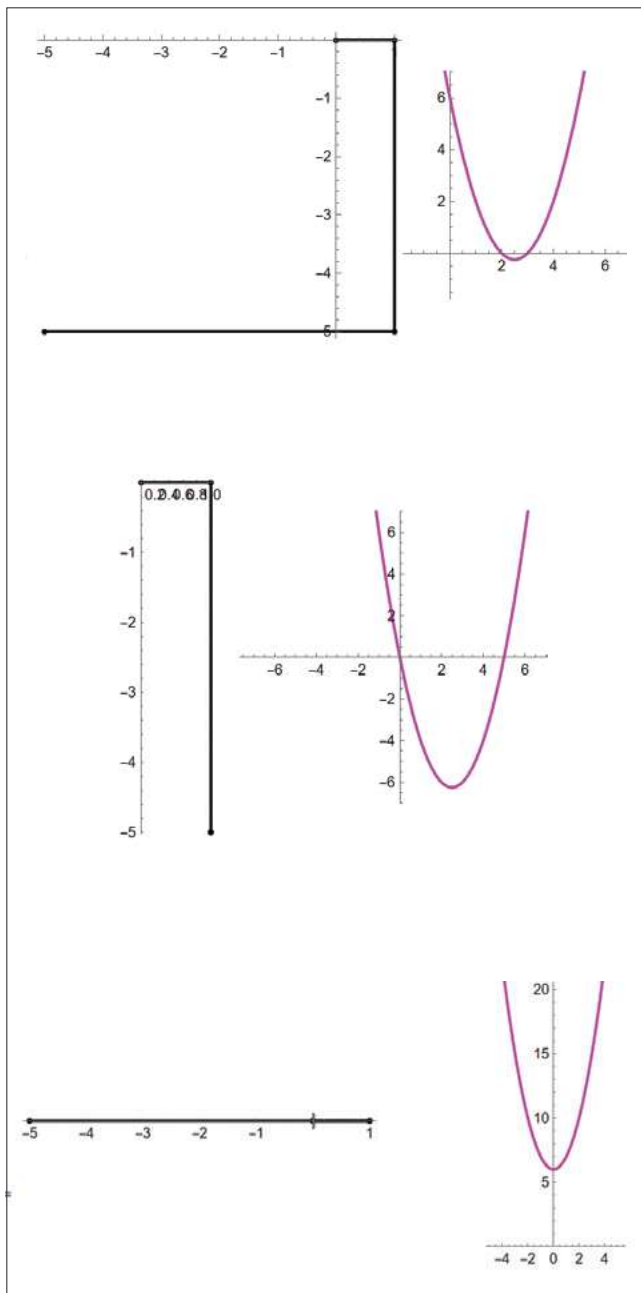


Figura 2.

$\alpha_{n-2}$ , justaposto ao ponto final do último segmento traçado e medindo  $|a_{n-2}|$ . A direção deste novo segmento depende, como anteriormente, do sinal de  $a_{n-2}$ : para a esquerda se  $a_{n-2} > 0$ , para a direita se  $a_{n-2} < 0$ . Em geral, as direções dos segmentos cumprem a seguinte regra: a curva  $\alpha$  que se vai desenhando, feita de segmentos de reta justapostos, orienta-se no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio se os coeficientes são todos positivos, e no sentido horário caso os coeficientes sejam todos negativos. Mais precisamente, se os coeficientes do polinómio de grau  $n$  são todos positivos, então os segmentos correspondentes às parcelas no polinómio de grau  $n - k$ , com  $k$  par, são horizontais, tendo sentidos alternados e começando para a direita; e os segmentos associados às parcelas no polinómio de grau  $n - k$ , com  $k$  ímpar, são verticais, também em sentidos alternados e começando para cima. Se o polinómio tiver um coeficiente negativo, o sentido do segmento correspondente é o oposto ao descrito; se o coeficiente for nulo, o segmento reduz-se a um ponto. Na figura 2, esta construção está feita para os polinómios  $x^2 - 5x + 6$ ,  $x^2 - 5x$  e  $x^2 + 6$ .

A construção desta representação plana do polinómio  $f$  termina quando se esgotam os coeficientes do polinómio, obtendo-se deste modo uma curva  $\alpha$  formada por  $\ell$  segmentos de reta, sendo  $1 \leq \ell \leq n + 1$ , que começa em  $O$  e termina num ponto que designaremos por  $T$ . A figura 3 mostra a curva  $\alpha$  para os polinómios  $3x^4 + x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ ,  $3x^4 + 2x^2 - 5x + 7$ ,  $3x^4 - 5x + 7$  e  $3x^4 + 2x^2 + 7$ .

Uma vez traçada a curva  $\alpha$ , construa-se uma outra curva, digamos  $\beta$ , dependente da escolha inicial de um ângulo  $\theta$ :

- (a) O primeiro segmento de reta  $\beta_1$  de  $\beta$  começa em  $O$ , tem inclinação relativamente ao eixo dos  $x$ 's dada por

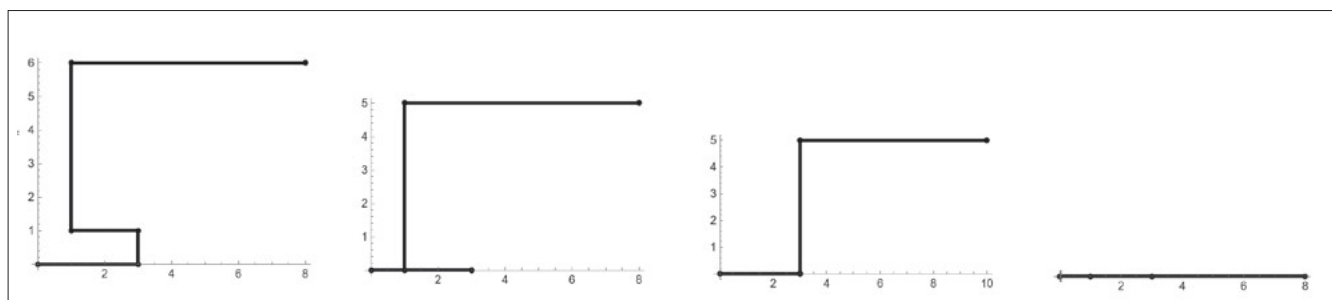


Figura 3.

$\theta$ , e termina num ponto  $Q_1$  da linha que passa em  $P_n$  com direção vertical.

(b) O segundo segmento de reta  $\beta_2$  de  $\beta$  começa em  $Q_1$  e faz com  $\beta_1$  um ângulo de  $90^\circ$ . Esta mudança de ângulo na direção do movimento de  $\beta_1$  exige uma escolha se a continuação  $\beta_2$  é feita do outro lado da linha vertical ou do mesmo lado de  $\beta_1$ . Essa escolha é feita de modo a assegurar que o segmento  $\beta_2$  intersesta a linha horizontal determinada pelo coeficiente  $a_{n-2}$  do polinômio  $f$ .

(c) Prosseguimos com o processo descrito anteriormente, até se intersestar a reta que contém o último segmento da curva  $\alpha$ .

Em geral, esse último ponto da curva  $\beta$  difere do último ponto  $T$  da curva  $\alpha$ . Coincide com ele se e só se o número  $x_0 = -\text{tangente}(\theta)$  for um zero real do polinômio. Ou seja, a equação (1) tem uma solução real se e só se for possível unir  $O$  a  $T$  por uma curva  $\beta$  como definida anteriormente.<sup>1</sup>

Se uma tal curva  $\beta$  existir, as curvas  $\alpha$  e  $\beta$  formam um polígono  $\mathcal{L}$ , possivelmente degenerado num segmento, a que chamaremos *polígono de Lill do polinômio  $f$* . É o que acontece nos exemplos da figura 4, que se refere aos polinômios  $2x + 1$ ,  $x^2 - 2x + 1$ ,  $x^2 - 2$ ,  $x^2 - 5x + 6$  e em que as curvas  $\alpha$  e  $\beta$  estão traçadas a preto e magenta, respectivamente. Note-se que são várias as possíveis curvas  $\beta$ , para diferentes ângulos iniciais  $\theta$ , caso a equação polinomial tenha mais do que uma solução real.

A figura 5 contém informação análoga sobre os polinômios  $x^3 - 9$ ,  $x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ ,  $x^3 - 7x - 6$  e  $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 10x + 12$ .

Em [3], o leitor encontra uma aplicação interativa com um cursor que permite, para cada polinômio, variar o ângulo  $\theta$ , ver como a curva  $\beta$  se modifica e ainda procurar as posições em que termina em  $T$ , isto é, procurar os zeros reais do polinômio escolhido.

Para equações quadráticas há uma construção geométrica alternativa para testar a existência de soluções reais. Mais precisamente, a cada polinômio  $x^2 + bx + c$  está associada uma circunferência (dita de Carlyle) que tem como diâmetro o segmento  $AB$ , sendo  $A = (0, 1)$  e  $B = (-b, c)$ ; os zeros do polinômio são precisamente as abscissas dos pontos de interseção desta circunferência

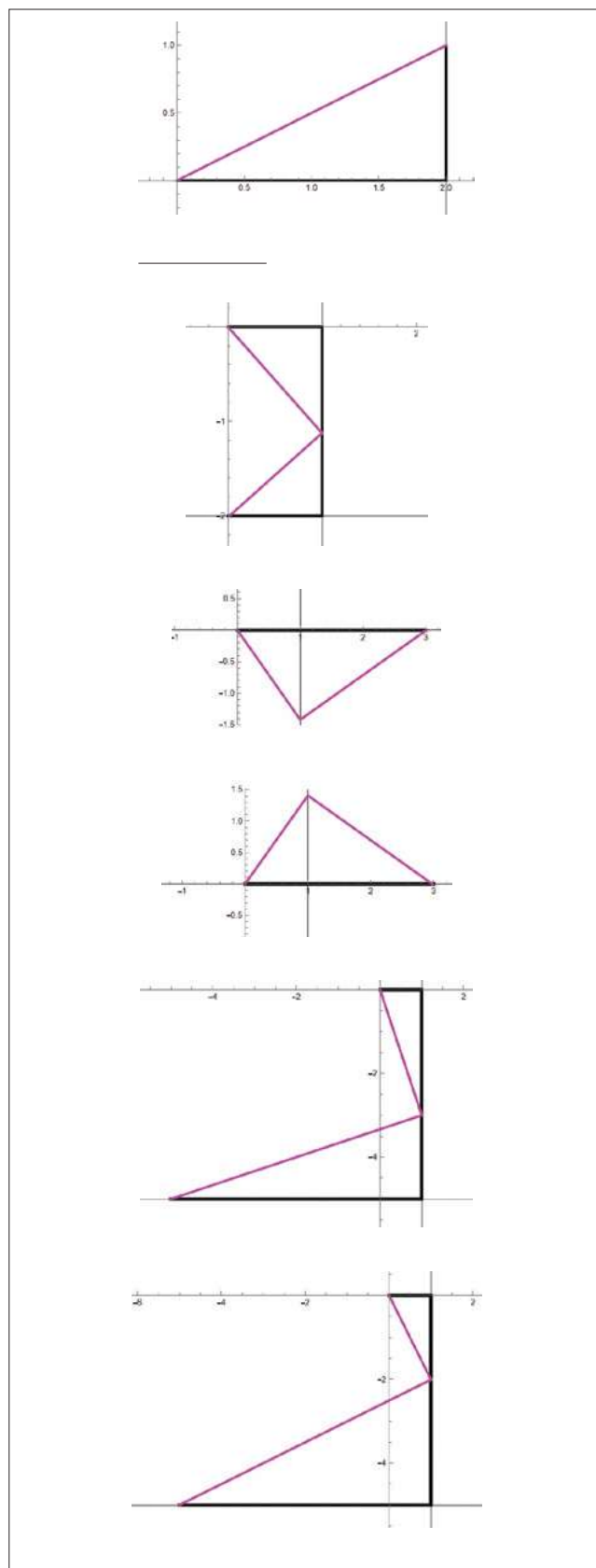


Figura 4.

<sup>1</sup> Uma demonstração elementar desta afirmação pode ser lida em [1].

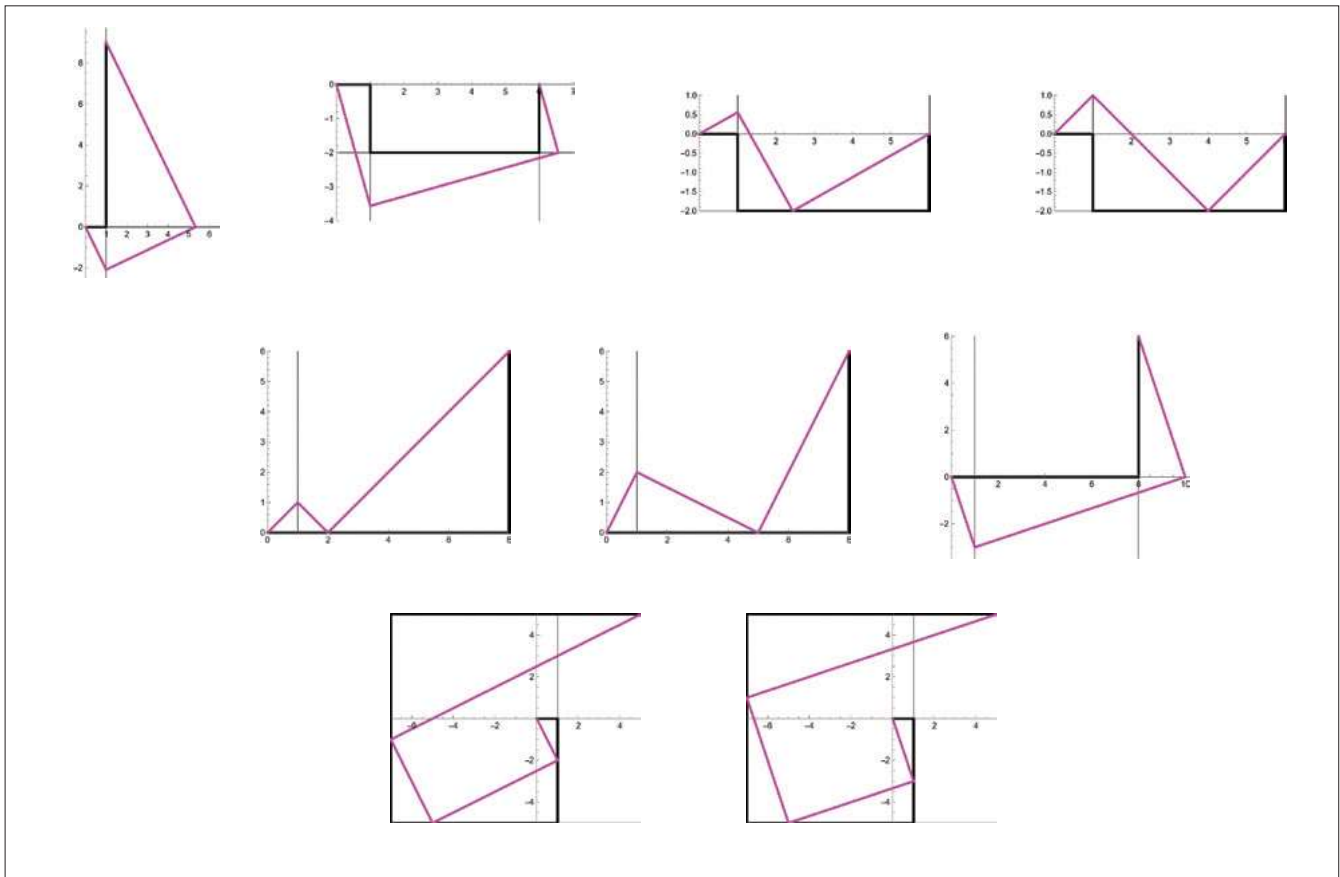


Figura 5.

com o eixo dos  $x$ 's, se existem. Para provar esta afirmação, podemos supor que os pontos  $A$  e  $B$  são distintos, caso contrário a circunferência é degenerada, não interseca o eixo dos  $x$ 's e o polinómio é  $x^2 + 1$ , que não tem zeros reais. Sendo  $A \neq B$ , a circunferência de Carlyle correspondente tem como equação cartesiana

$$x(x + b) + (y - 1)(y - c) = 0$$

e basta agora intersecá-la com a reta de equação  $y = 0$ . As abcissas dos pontos de interseção são, portanto, as soluções da equação  $x(x + b) + c = 0$ . A figura 6 ilustra a informação dada pela circunferência de Carlyle sobre os zeros reais dos polinómios  $x^2 + 2x + 1$ ,  $x^2 - 5x + 6$ ,  $x^2 + 2x + 2$  e  $x^2 + 1$ . Note-se que, para o penúltimo polinómio, a circunferência de Carlyle existe mas não interseca o eixo dos  $x$ 's, enquanto para o último polinómio a circunferência reduz-se ao ponto  $(0, 1)$ .

Com os módulos interativos produzidos pelo Atractor, disponíveis em [3], podemos considerar um polinómio, aplicar o método de Lill para verificar se tem zeros reais,

e ainda mudar os coeficientes do polinómio para analisar como variam os zeros reais e os polígonos de Lill correspondentes. É o que a figura 7 indica para a família parametrizada de polinómios dada por  $f_\lambda(x) = x^2 - 5x + \lambda$ , com  $\lambda \in \{0, 4, 6, 25/4\}$ .

Esta componente interativa sobre o método de Lill no portal do Atractor pode ainda ser usada para se responder a algumas questões sugeridas pelo método, que o leitor é convidado a explorar. Por exemplo:

- (I) Dado um polinómio  $f$  de grau maior ou igual a 2 e um caminho  $\beta_f$  que determina um zero real  $x_0$  de  $f$  através do método de Lill, então  $\beta_f$  é a curva poligonal  $\alpha_g$  do polinómio  $g = f/(x - x_0)$  se devidamente reposicionada (isto é, com a figura rodada de modo a que o segmento inicial de  $\beta_f$  fique horizontal) e, de seguida, reescalada por uma homotetia. Esta propriedade está ilustrada na figura 8 para o polinómio  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ .

A primeira imagem da figura 8 representa, em co-

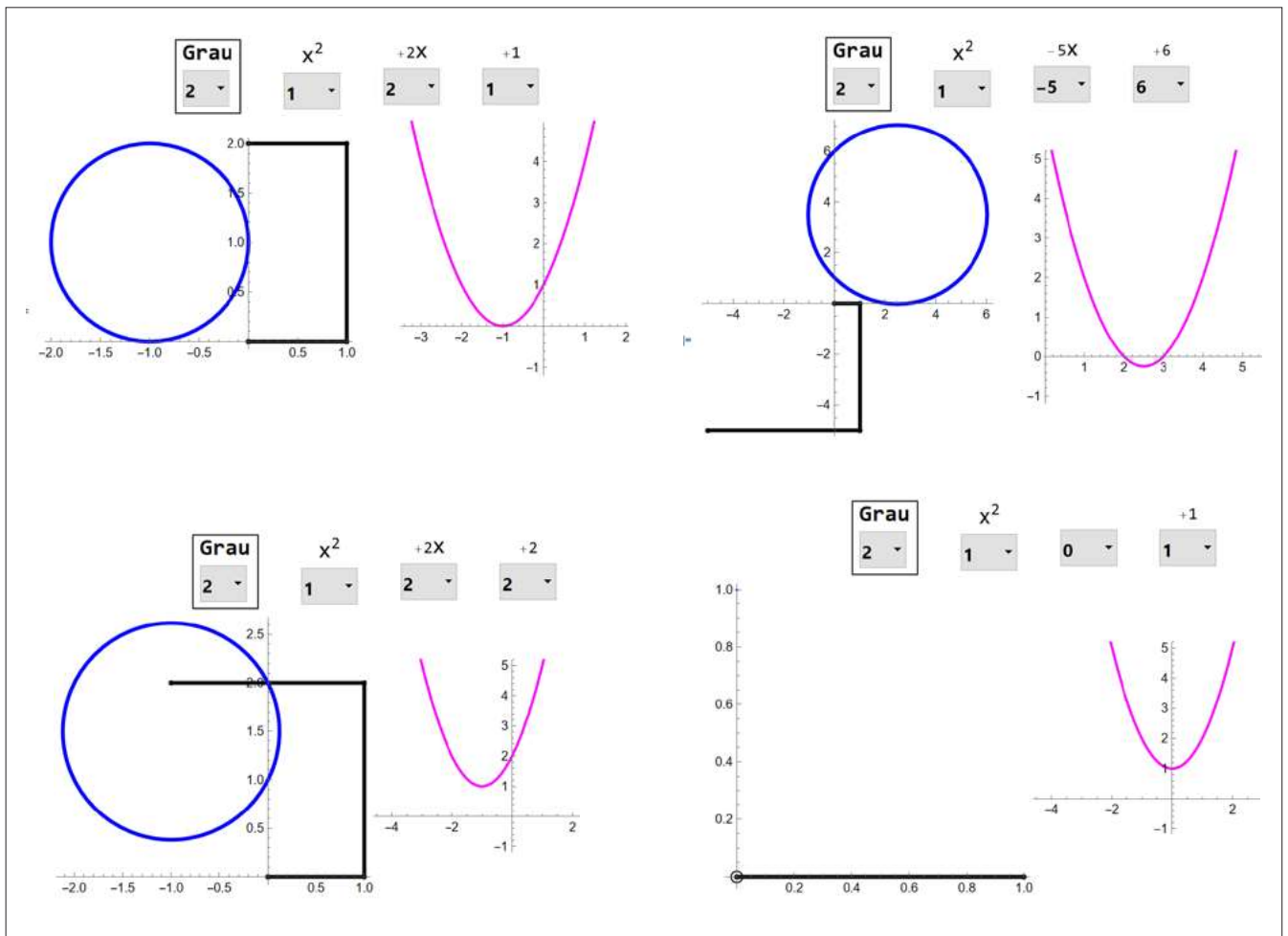


Figura 6.

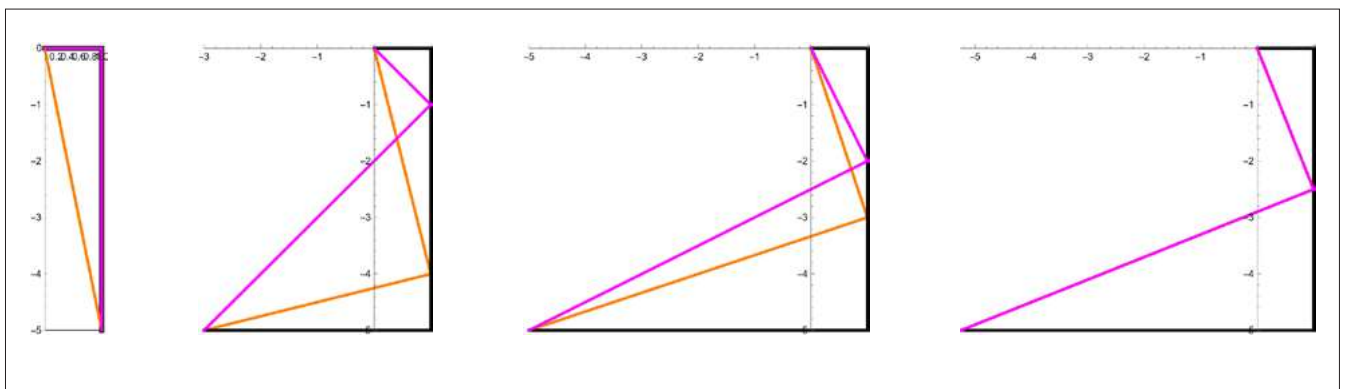


Figura 7.

res diferentes (magenta, laranja e castanho), três caminhos  $\beta$  que ligam  $O$  a  $T$  e têm declives iniciais relativos ao primeiro traço preto (horizontal) iguais a  $k=2$ ,  $k=-1$  e  $k=-3$ , respectivamente. E, portanto, pelo que afirmámos anteriormente, o polinómio tem três zeros reais,  $-2$ ,  $1$  e  $3$ .

Na imagem do meio, obtida escolhendo  $k=2$ , procede-se a uma construção de curvas  $\beta$  análoga à anterior, mas agora com declives iniciais relativamente ao primeiro segmento magenta em vez de ao primeiro segmento horizontal preto. Desse modo, encontramos duas escolhas de declives que geram polígonos

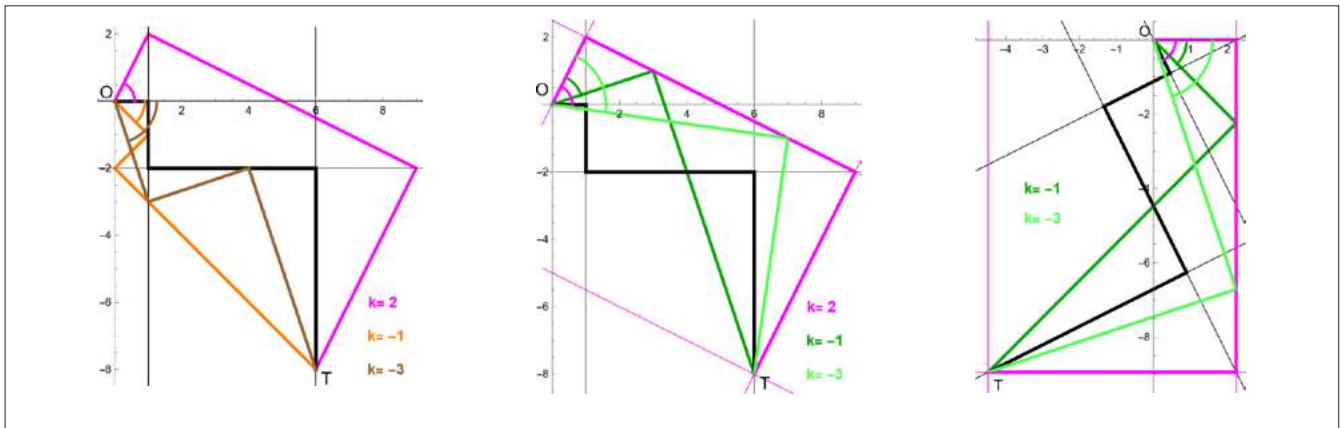


Figura 8.

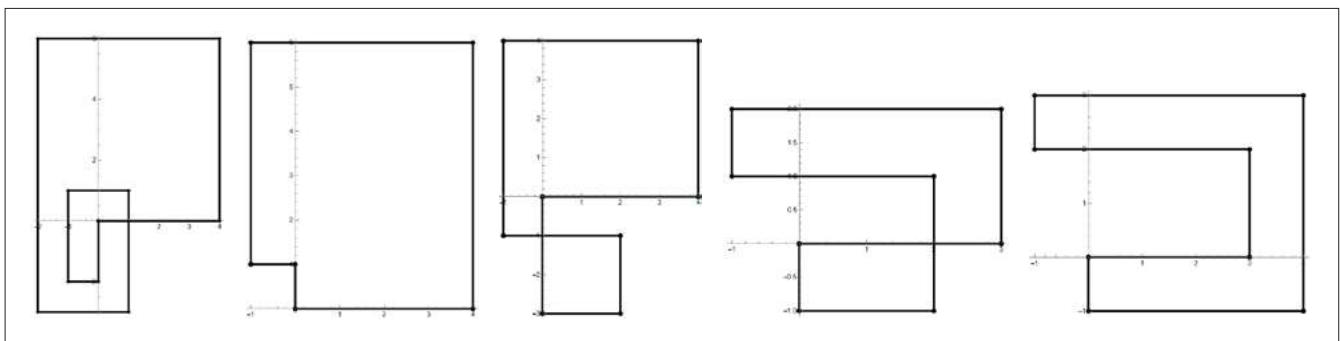


Figura 9.

de Lill,  $k = -1$  e  $k = -3$ , precisamente os dois valores de  $k$  que não foram usados para passar da primeira imagem para a segunda. De algum modo, é como se a curva magenta representasse o polinómio do segundo grau que é quociente do inicial por  $x + 2$  e pudessemos repetir a construção com essa nova curva para obter os outros zeros reais do polinómio inicial; e, portanto, é como se esta construção geométrica permitisse visualizar a divisão do polinómio inicial por  $x + 2$ . Para facilitar a compreensão desta iteração do método, representamos na terceira imagem o resultado de uma rotação que colocou na horizontal o primeiro segmento magenta.

(II) As curvas  $\alpha$  dos polinómios indicados na figura 9 são todas fechadas, isto é,  $T = O$ . O que têm estes polinómios em comum?

A resposta (são todos divisíveis por  $x^2 + 1$ ) é de algum modo surpreendente, mas de facto este é um caso particular de um resultado geral: a curva poligonal  $\alpha$  de um polinómio  $f$  é fechada se e só se  $x^2 + 1$  divide  $f$ .

Podem ler-se uma prova desta propriedade em [1].

(III) A configuração das curvas  $\alpha$  e  $\beta$  admite algumas generalizações. Por exemplo, podemos variar o ângulo de  $90^\circ$  entre os segmentos de reta  $\alpha_j$  que formam a curva  $\alpha$ ; ou alterar o ângulo de  $90^\circ$  com que os segmentos da curva  $\beta$  se refletem na direção vertical ou horizontal. Em [1], o leitor encontra informação adicional sobre estas abordagens mais gerais.

[1] D. Kalman, M. Verdi. "Polynomials with Closed Lill Paths". *Mathematics Magazine*, Vol. 88, nº. 1, 2015, pp. 3-10.

[2] M. E. Lill. "Résolution graphique des équations numériques de tous degrés à une seule inconnue, et description d'un Instrument inventé dans ce but". *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Ser. 2, nº. 6, 1867, pp. 359-362.

[3] <https://www.atractor.pt/mat/polinomios-vs-poligonos/>