A Geometria do Planeta Terra

A esfera pode ser considerada um modelo (simplificado[1]) do planeta Terra e existe uma geometria que se dedica ao seu estudo: a Geometria Esférica. O estudo da Geometria Esférica, principalmente o relacionado com triângulos esféricos, é muito antigo e foi sendo desenvolvido ao longo dos séculos devido à sua grande aplicabilidade à Astronomia e à Navegação. O português Pedro Nunes foi um dos matemáticos que se notabilizou nesta área tendo descoberto uma curva que, na época dos Descobrimentos, gerou alguma controvérsia. Em 1537, Pedro Nunes publicou dois tratados sobre alguns problemas relacionados com certas rotas de navegação que mantêm o percurso do navio num rumo magnético constante intersectando todos os meridianos segundo o mesmo ângulo. Esses percursos determinam um tipo de curva, conhecida por curva loxodrómica. Desde essa época que se sabe que um percurso mantendo um ângulo constante em relação aos meridianos não é, em geral, o caminho mais curto, pois não é um arco de círculo máximo (curva na esfera que minimiza a distância entre dois pontos, figura 1). Assim, Pedro Nunes sugeria que o barco devesse procurar seguir o rumo de um círculo máximo, efectuando as necessárias correcções a intervalos de tempo regulares para contrariar o efeito da curva loxodrómica. Para tal, o matemático português propôs um método matemático que foi alvo de duras críticas pela sua difícil aplicabilidade em alto mar. «As contribuições teóricas de Nunes para a navegação foram muito avançadas para o seu tempo. A dificuldade em as aplicar deve-se principalmente à precisão insuficiente dos instrumentos disponíveis e ao facto de a matemática da época ser demasiado pesada e laboriosa para ser usada no mar.» (Randles, 1989 [4])

Mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa para a navegação, pilotos de avião e os navegadores devem ter conhecimentos sobre a curva loxodrómica (Alexander, 2004 [1]).

Apesar de muitos resultados da Geometria Esférica serem conhecidos desde a Antiguidade, enquanto sistema axiomático, este tipo de geometria só foi formalizado no séc. XIX após a descoberta das geometrias não Euclidianas, atribuída aos matemáticos Gauss, Lobatschewski e János Bolyai (Rosenfeld, 1976 [5]).

Esta geometria difere em vários aspetos da Geometria Euclidiana e, ao longo deste artigo, são exploradas algumas dessas diferenças. No final, numa colaboração entre o Atractor e o Núcleo do Porto da APM, é apresentada uma tarefa para alunos cujo propósito principal de ensino é a abordagem e exploração de algumas diferenças entre a Geometria Esférica e a Geometria Euclidiana, incidindo na soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico.

Geometria Esférica

Na Geometria Euclidiana, o caminho mais curto entre dois pontos é o segmento de reta determinado por eles. Na esfera, o

Figura 1. A cinzento escuro está representada uma curva loxodrómica que passa por dois pontos e a cinzento claro o menor arco de círculo máximo definido por esses pontos (caminho mais curto).

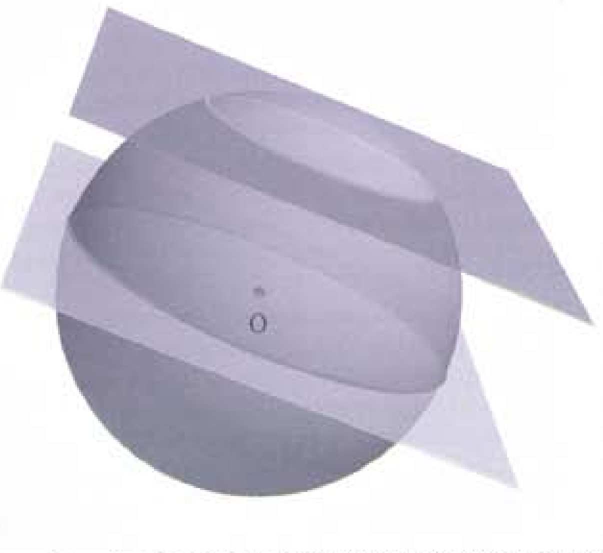


Figura 2. Uma circunferência, na esfera, pode ser obtida intersectando a esfera com um plano. Quando o plano contém o centro da esfera obtém-se um círculo máximo.

Figura 3. No planeta Terra, a linha do Equador é um círculo máximo e os meridianos são semicírculos máximos.

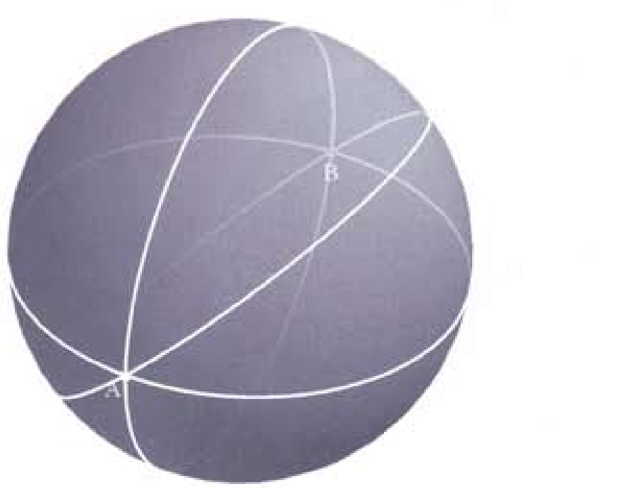


Figura 4. Dois círculos máximos intersetam-se sempre em dois pontos antípodas.

caminho mais curto entre dois pontos é dado por um arco de circunferência obtido intersetando a esfera com um plano contendo o seu centro. Essa circunferência é usualmente designada por *círculo máximo*. (Figuras 2 e 3)

Na esfera, os círculos máximos assumem o papel análogo ao das retas da Geometria Euclidiana e os arcos menores de círculo máximo assumem o papel análogo ao dos segmentos de reta.

Desta forma, na esfera, a distância entre dois pontos não antípodas[2] determina-se calculando o comprimento do menor arco de círculo máximo definido pelos dois pontos. Note-se que, se A e B são antípodas, a distância entre A e B é igual ao comprimento de um semicírculo máximo.

Numa esfera de raio r e centro O, considere-se o ângulo AOB correspondente ao menor arco AB e α a sua amplitude. Então,

$$d(A,B) = \alpha r, \ \alpha \text{ em radianos}$$

ou

$$d(A,B) = \frac{\alpha\pi}{180^\circ} r, \ \alpha \text{ em graus.}$$

Paralelismo

Podemos definir *retas paralelas* como sendo retas que não se intersetam. Na esfera, dados dois círculos máximos, estes intersetam-se sempre em dois pontos antípodas. Por exemplo, os meridianos terrestres intersetam-se no polo Norte e no polo Sul. (Figura 4)

Assim, ao identificarmos o conceito de reta na esfera com o de círculo máximo, concluímos que:

Na Geometria Esférica não existem retas paralelas!

Aqui reside uma das diferenças substanciais entre a Geometria Esférica e a Geometria Euclidiana.

Na verdade, as geometrias não Euclidianas surgiram no desenlace da longuíssima história do famoso 5.º Postulado de Euclides, mais conhecido pelo Postulado das Paralelas. Ao longo dos séculos, foram várias as tentativas de provar este postulado a partir dos restantes ou então de o substituir por outro mais simples. Um dos axiomas equivalentes que é usado nos livros modernos foi dado por Playfair: *dado um ponto P que não está numa reta r, existe uma só reta no plano de P e r que contém P e que não interseta r.* (Kline, 1972 [3]).

No início do século XIX, alguns matemáticos, incluindo o alemão Carl Friedrich Gauss (1777–1855), notaram que o Postulado das Paralelas não poderia ser provado nem como verdadeiro nem como falso com base nos outros postulados da Geometria Euclidiana, ou seja, o Postulado das Paralelas seria independente dos restantes. Seria então possível desenvolver uma nova geometria a partir de um sistema axiomático que contivesse uma alternativa ao Postulado das Paralelas. Mas foram Lobatschewski (1792–1856) e János Bolyai (1802–1860) que, de forma independente, publicaram pela primeira vez os resultados de uma nova geometria não Euclidiana (Rosenfeld, 1976 [5]), conhecida atualmente por Geometria Hiperbólica. A Geometria Hiperbólica obtém-se substituindo o Postulado das Paralelas pelo Axioma Hiperbólico: *dada uma reta e um ponto exterior à reta, existem, pelo menos, duas retas distintas contendo o ponto dado e paralelas à reta dada.*

Na Geometria Esférica, o Postulado das Paralelas é substituído pelo Axioma Elíptico: *dada uma reta e um ponto exterior à reta, não existe nenhuma reta contendo o ponto dado e paralela à reta dada.*

Bernhard Riemann (1826–1866) foi o primeiro a reconhecer a Geometria Esférica como um tipo de geometria não Euclidiana onde não existem retas paralelas. (Coxeter, 1998 [2])

A descoberta das geometrias não Euclidianas teve consequências muito importantes, quer matemáticas quer filosóficas, principalmente no que diz respeito aos fundamentos da matemática.

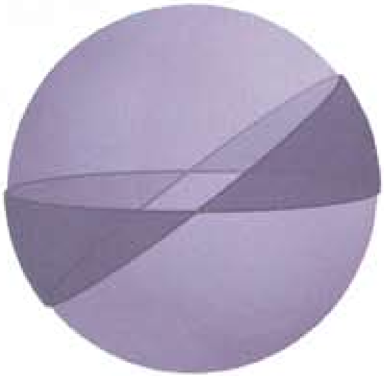
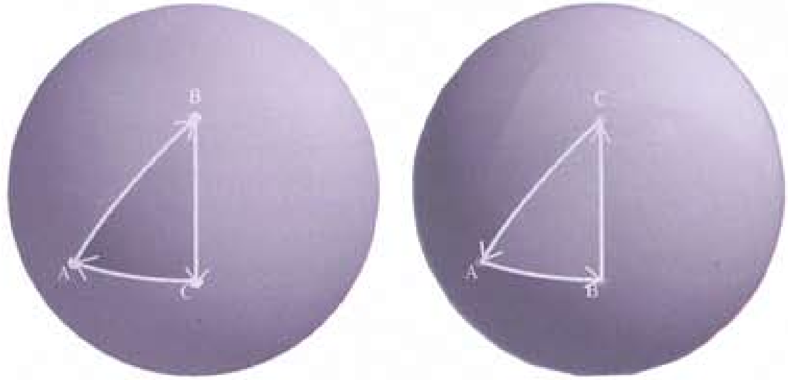


Figura 5. Biângulos determinados por dois círculos máximos.



Figuras 6a e 6b. Nestas esferas, estão representados dois triângulos diferentes [com interior a cinza escuro] definidos pelos mesmos vértices.

Biângulos

Na esfera existem polígonos com dois lados!

A explicação é simples: na esfera, os lados dos polígonos são segmentos esféricos, ou seja, arcos menores de círculo máximo; dados dois círculos máximos, estes intersetam-se sempre em dois pontos antípodas, dividindo a esfera em quatro regiões, cada uma das quais com dois lados; estas regiões designam-se por *biângulos* ou *lúnulas*. (Figura 5)

Portanto, ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, na Geometria Esférica existem polígonos com dois lados, os biângulos, cujos vértices são pontos antípodas e cujos lados são semicírculos máximos.

Podemos calcular a área de um biângulo de forma simples, conhecendo a amplitude do seu ângulo e a área da esfera ($4\pi r^2$) e observando que a área do biângulo é diretamente proporcional à amplitude do ângulo. Assim, a área de um biângulo com ângulo α é dada por:

$$2\alpha r^2,\ \alpha \text{ em radianos} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha\pi}{90}r^2,\ \alpha \text{ em graus,}$$

onde r é o raio da esfera.

Triângulos Esféricos

Com três pontos distintos na superfície esférica podemos obter dois triângulos!

Dados três pontos, estes podem definir dois triângulos, na medida em que podem definir duas regiões limitadas na superfície da esfera (figuras 6a e 6b). Na Geometria Euclidiana isto não acontece pois, dados três pontos não colineares (não pertencentes à mesma reta) e os três segmentos de reta que os unem dois a dois, estes definem apenas uma região limitada e, por isso, um único triângulo.

A *área de um triângulo esférico* pode ser determinada conhecendo a área dos biângulos que lhe estão associados. Temos que distinguir dois casos: o caso em que o triângulo é *pequeno* (o seu interior está contido numa semiesfera) e o caso contrário.

1. Tomemos um triângulo esférico *pequeno* T. Em cada vértice do triângulo esférico, os círculos máximos que contêm os respetivos lados do triângulo formam dois biângulos congruentes com ângulos geometricamente iguais ao ângulo interno do triângulo nesse vértice. Note-se que um desses biângulos contém o interior do triângulo e o outro contém o interior do triângulo antípoda (triângulo formado pelos antípodas dos pontos do triângulo). (Figura 7a) Considerando os três vértices do triângulo, temos seis biângulos dos quais três intersetam-se no interior do triângulo e os outros três intersetam-se no interior do triângulo antípoda. Na região esférica restante, os seis biângulos são disjuntos dois a dois. Assim, estes biângulos «cobrem» o triângulo e o seu antípoda três vezes e a restante região esférica uma vez. Portanto, a soma da área dos seis biângulos é igual à área da esfera acrescida do dobro da área do triângulo esférico, A_T, e do dobro da área do seu antípoda (Figuras 7b e 7c). Notando que T e o seu antípoda têm a mesma área e fazendo alguns cálculos simples, obtém-se a fórmula da área do triângulo esférico T: $A_T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$, onde α, β e γ são as medidas das amplitudes dos ângulos internos do triângulo em radianos. Se as medidas das amplitudes α, β e γ forem dadas em graus, temos a fórmula
$$A_T = (\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ)\frac{\pi}{180^\circ}r^2.$$
Esta fórmula é conhecida por *Teorema de Girard*.
2. Se o triângulo esférico for *grande*, ou seja, se contiver uma semiesfera, podemos calcular a sua área fazendo a diferença entre a área da esfera e a área do triângulo pequeno que os seus lados e vértices também determinam. Usando o resultado anterior obtemos a mesma fórmula para a área do triângulo.

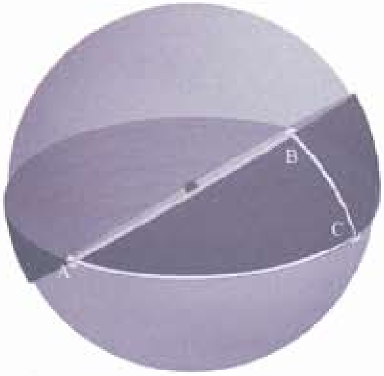


Figura 7a. Dois biângulos com vértice em *A*. Um biângulo «cobre» o triângulo [*ABC*].

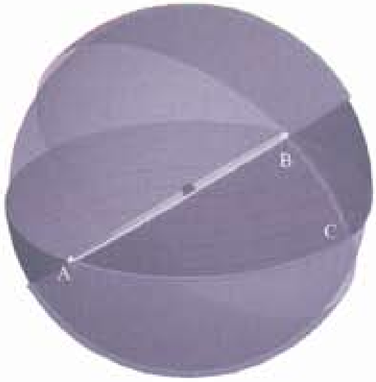


Figura 7b. Dois biângulos com vértice em *A* e dois biângulos com vértice em *B* dos quais dois intersetam-se no interior do triângulo [*ABC*] e os outros dois intersetam-se no interior do triângulo antípoda.

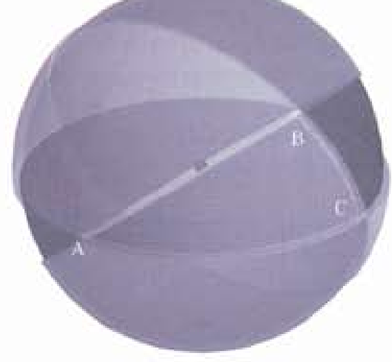


Figura 7c. Seis biângulos com vértices nos vértices do triângulo [*ABC*] dos quais três intersetam-se no interior do triângulo e os outros três intersetam-se no interior do triângulo antípoda.

Teorema de Girard: A área de um triângulo esférico é igual a $A_T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$ onde α, β e γ são as medidas das amplitudes, em radianos, dos ângulos internos do triângulo e r é o raio da esfera.

À diferença entre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico e a amplitude do ângulo raso chama-se *excesso angular*. A fórmula dada no Teorema de Girard indica-nos que a área de um triângulo esférico fica determinada pelo seu excesso angular e pelo raio da esfera, sendo que a área e a medida do excesso angular são diretamente proporcionais.

A área de um triângulo esférico é diretamente proporcional à medida do excesso angular.

Em particular, o excesso angular é sempre positivo, donde podemos concluir que:

A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico é superior a 180°.

Quando o excesso angular é um valor próximo de zero (isto é, a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor próximo de π rad, ou 180.°), o triângulo é «quase plano» e a sua área é «quase núla». Por outro lado, quando o excesso angular é um valor próximo de 4π rad, ou 720° (isto é, a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor próximo de 5π rad, ou 900°), a sua área é próxima da área da esfera.

A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico varia entre π e 5π radianos, 180° e 900°.

Este é um resultado muito diferente do obtido na Geometria Euclidiana onde a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é constante e igual a 180°.

O Teorema de Girard conduz-nos ainda a outra enorme diferença entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica:

Dois triângulos esféricos semelhantes são necessariamente congruentes!

Como a área de um triângulo esférico depende apenas da soma das amplitudes dos seus ângulos internos, na esfera todos os triângulos com ângulos congruentes têm a mesma área; logo, são congruentes. Portanto, na Geometria Esférica não existem triângulos com a mesma forma e áreas diferentes.

A Geometria do Planeta Terra na sala de aula de Matemática

De facto, enquanto humanidade, a nossa «casa» é a superfície de um planeta quase esférico, cujas propriedades geométricas particulares se destacaram desde a antiguidade, e cujo conhecimento foi — e continua a ser — crítico no desenvolvimento de áreas como a astronomia e a navegação. Ainda que exterior aos conteúdos programáticos do ensino básico, a Geometria Esférica permite aos alunos «contactar com aspetos da História da Matemática e reconhecer o papel da Matemática no desenvolvimento da tecnologia e em várias técnicas, […] o contributo de diversos povos e civilizações para o desenvolvimento desta ciência, a sua relação com os grandes problemas científicos e técnicos de cada época, o seu contributo para o progresso da sociedade, e a sua própria evolução em termos de notações, representações e conceitos, proporcionando uma perspetiva dinâmica sobre a Matemática e o seu papel na sociedade». (Programa de Matemática do Ensino Básico, 2007, p. 10)

Neste contexto, e mantendo «como ideia central o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos» (idem, p. 7), entendemos pertinente a apresentação de propostas de abordagem e exploração comparativas de alguns conceitos básicos (como os de reta / segmento de reta, ângulo, triângulo, distância ou área), entre as geometrias Euclidiana e Esférica, com base na manipulação de materiais ou utilização de tecnologias. O conjunto das tarefas propostas, para alunos do 1.º ao 12.º anos de escolaridade, pode ser acedido em

http://atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino.

Notas

1 Na verdade, o planeta Terra pode ser modelado de forma mais precisa por um elipsoide: o raio da Terra varia entre, aproximadamente, 6357 Km nos polos e 6378 Km na linha do Equador.

2 Pontos antípodas são pontos diametralmente opostos.

Referências

[1] Alexander, James — *Loxodromes: A Rhumb Way to Go*. Mathematics Magazine, Vol. 77, n.º 5, December 2004, pp. 349–356.

[2] Coxeter, H. S. M. — *Non-Euclidean Geometry*. Cambridge University Press, 1998.

[3] Kline, Morris — *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Volume 3. Oxford University Press, 1972.

[4] Randles, W. G. L. — *Pedro Nunes e a Descoberta da Curva Loxodrómica, ou como, no século dezasseis, a navegação com o globo não resolveu as dificuldades resultantes do uso de cartas planas*. Gazeta de Matemática, n.º 143, Julho de 2002, pp. 90–97. Tradução de Suzana Metello de Nápoles, revista por João Filipe Queiró, Henrique Leitão e pelo autor de *Pedro Nunes and the discovery of the loxodromic curve, or how, in the sixteenth century, navigating with a globe had failed to solve the difficulties encountered with the plane chart*, Revista da Universidade de Coimbra, Vol. XXXV, 1989, pp. 119–130.

[5] Rosenfeld, B. A. — *A History of Non-Euclidean Geometry*. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1988. Translation of Istoriya Neevklidovoi Geometrii. Moscow: Nauka, 1976.

Nota: Na página http://atractor.pt/mat/GeomEsf encontra-se um trabalho sobre Geometria Esférica, elaborado sob a orientação do Atractor, no âmbito de uma bolsa atribuída pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia para ações de divulgação matemática junto da Associação Atractor. Para além do texto, no qual se baseia este artigo, esse trabalho integra componentes interativas em formato CDF, preparadas com o programa *Mathematica* e cujos ficheiros são utilizados nas tarefas propostas numa colaboração entre a Associação Atractor e o Núcleo do Porto da Associação de Professores de Matemática. Para a utilização destes ficheiros, deve estar instalado no computador o *Wolfram CDFPlayer*, que pode ser importado sem encargos a partir de http://www.wolfram.com/cdf-player/.

As tarefas elaboradas no âmbito da referida colaboração podem também ser acedidas a partir da página do MPT2013 da APM, http://mpt2013.apm.pt.

Atractor e Núcleo do Porto da APM