

## Alguns conteúdos mais recentes do site do ATRACTOR

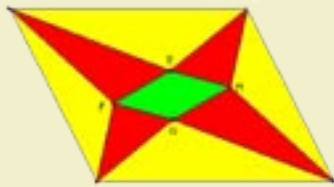
### Teorema de Morley

As trissectrizes adjacentes de um triângulo qualquer intersectam-se em pontos que são os vértices de um novo triângulo. O teorema de Morley afirma que este é sempre equilátero. Tal pode ser observado em <http://www.atractor.pt/mat/morley/introducao.htm>. É apresentada



também uma versão deste teorema para paralelogramos. Neste caso, as trissectrizes adjacentes de um paralelogramo qualquer intersectam-se em pontos que são os vértices de um novo paralelogramo, que é um losango

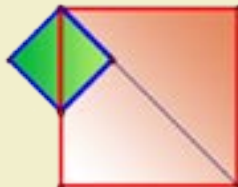
se o paralelogramo inicial é um rectângulo e é um rectângulo se o paralelogramo inicial é um losango. Para saber mais, inclusive para ver o que acontece com os polígonos regulares, pode consultar <http://www.atractor.pt/mat/morley/paralelogramos.htm>



### Incomensurabilidade

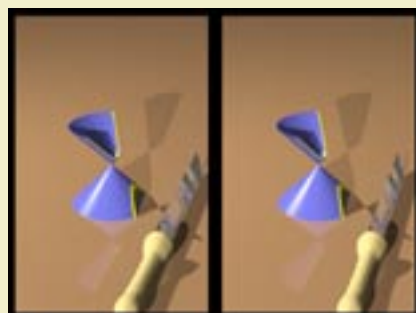
A incomensurabilidade entre duas grandezas refere-se ao facto da sua razão não poder ser expressa por um número racional. A medida de certas diagonais de polígonos regulares (nomeadamente do quadrado, do pentágono e do hexágono) e a medida do seu lado são incomensuráveis.

Em geral, as demonstrações destes factos baseiam-se num processo de descida infinita, em que se vão construindo novos polígonos regulares de tamanho cada vez menor, o que pode ser visualizado em <http://www.atractor.pt/mat/incomensurabilidade/visualizacao.htm>. Para uma interpretação dinâmica deste processo, pode consultar <http://www.atractor.pt/mat/incomensurabilidade/dinamica1.htm>



### Cónicas

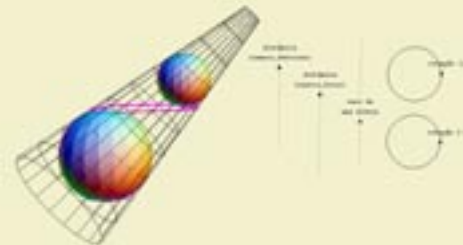
Esta animação representa a obtenção de uma hipérbole cortando de forma adequada um duplo cone. Também estão disponíveis animações semelhantes para as restantes cónicas em <http://www.atractor.pt/stereoP/imgs/icons/menus/outros-flash.htm>



### Esferas de Dandelin

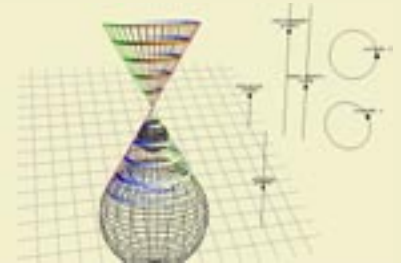
Dado um cone e um plano não passando pelo vértice, há sempre uma ou duas esferas tangentes simultaneamente ao cone e ao plano: diz(em)-se esfera(s) de Dandelin. A curva de intersecção do plano com o cone é uma cónica e o(s) ponto(s) de tangência da(s) esfera(s) com o plano é(são) o(s) foco(s) dessa cónica. A consideração desta(s) esfera(s) de Dandelin permite facilmente demonstrar que as cónicas, vistas como intersecções de um plano com um cone, são as mesmas curvas que as definidas num plano da maneira usual, à custa das conhecidas propriedades métricas envolvendo os focos. Os applets em <http://www.atractor.pt/mat/Dandelin> permitem observar a variação da(s) esfera(s) de Dandelin em função de vários parâmetros:

1. Dada uma cónica, um seu foco e um número  $r > 0$ , construção:



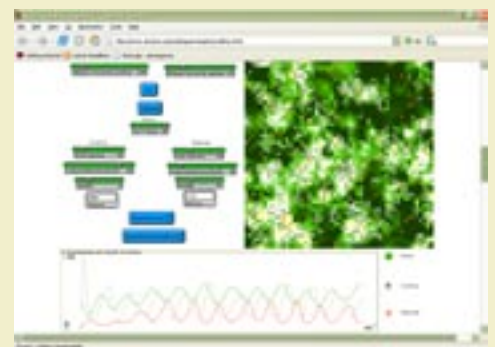
a) do cone de revolução que, seccionado pelo plano da cónica, produz essa cónica e admite a esfera de raio  $r$  tangente ao plano no foco, como esfera de Dandelin; b) da segunda esfera de Dandelin, caso exista.

2. Dado um cone de semi-abertura variável e um plano de inclinação e altura variáveis, construção da secção produzida pelo plano no cone.



### Relva, coelhos, raposas

Apresenta-se um modelo da interacção entre três elementos vivos de um ecossistema: relva, coelhos e raposas. A relva cresce e seca, os coelhos comem relva, envelhecem e reproduzem-se, as raposas comem os coelhos, envelhecem e reproduzem-se. São alguns exemplos de comportamentos a que se pode assistir nesta simulação. Há parâmetros controláveis, através de botões e cursores, que regulam diversos aspectos da coexistência das três espécies e o equilíbrio entre elas. Este trabalho pode ser consultado em <http://www.atractor.pt/mat/logo/exemplos/coelhos.html>

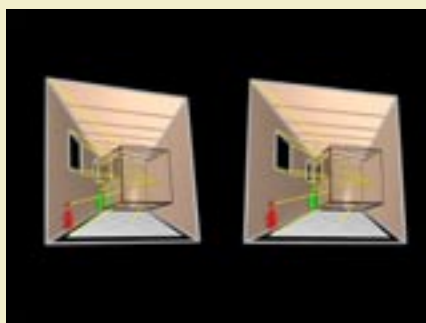


## Esfera de Alexander

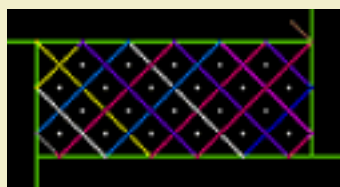
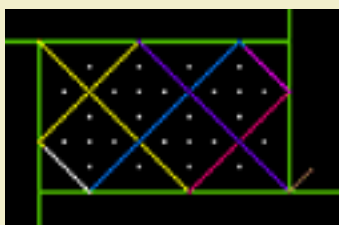
Dada uma curva simples e fechada no plano, o complementar tem duas componentes conexas - uma homeomorfa ao disco unitário aberto e outra homeomorfa ao exterior do disco unitário fechado. Haverá algo de análogo numa dimensão acima? A superfície conhecida como esfera com chifres de Alexander (1924) veio mostrar que não. A figura abaixo representa estereoscopicamente uma tal superfície. É homeomorfa a uma superfície esférica, divide o espaço em duas componentes conexas, mas na componente não limitada (exterior à esfera de Alexander) há lacetes que não se deformam num ponto. Portanto, essa componente não é equivalente ao complementar no espaço da bola fechada unitária. Para ver animações com a esfera de Alexander consulte <http://www.atractor.pt/stereoP/imagens/icons/menus/outros-flash.htm>



## Quarto de Ames



A visão estereoscópica ajuda a pôr em evidência a falibilidade da nossa visão baseada na perspectiva. Um tal exemplo marcante é constituído pelo Quarto de Ames, construído pelo Atractor para a Exposição Matemática Viva, patente no Pavilhão do Conhecimento. E a representação estereoscópica disponível no site <http://www.atractor.pt/stereoP/imagens/icons/menus/outros-mat.htm> ajuda a perceber o que conduz às ilusões provocadas pelo Quarto de Ames.

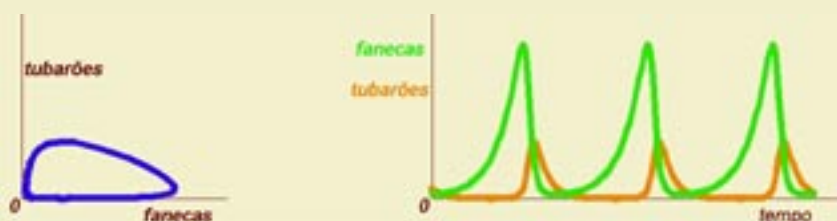


## Inversão no plano

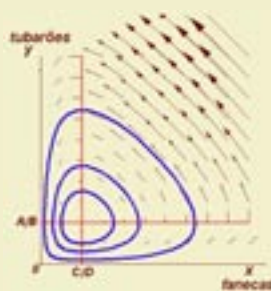
A inversão é uma transformação usada para resolver de forma elegante alguns problemas de geometria. O applet em <http://www.atractor.pt/mat/inversao> permite desenhar figuras geométricas variadas no plano e manipulá-las de diversos modos. Simultaneamente mostra as respectivas inversas relativamente a uma circunferência qualquer, permitindo assim a observação de alguns comportamentos interessantes desta transformação.



## Fanecas e tubarões



As fanecas alimentam-se de algas e outras substâncias que abundam no mar. Por outro lado, os tubarões comem as fanecas de forma voraz. Esperamos que o número de fanecas cresça quando há poucos tubarões e o número de tubarões cresça quando há muitas fanecas, e que daqui resultem ciclos de variação que se repetem ao longo do tempo.



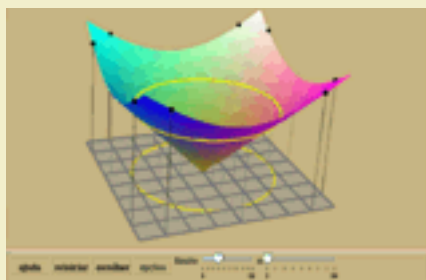
Em <http://www.atractor.pt/mat/peixes> pode acompanhar a construção do modelo de Volterra da relação presa-predador e descobrir de que forma uma análise qualitativa do sistema ajuda a compreender e a prever variações nas espécies em causa. E se a tudo isto juntarmos a acção do Homem numa pesca indiferenciada de ambas as espécies? A redução da pesca favorece os tubarões e explica o fracasso de técnicas de eliminação de pragas com insecticidas, como se conta em <http://www.atractor.pt/mat/peixes/textos/aplic.htm>

## Bilhar de inteiros

Dados dois valores inteiros positivos  $a$  e  $b$ , considere-se um rectângulo de lados  $a$  e  $b$  e de seguida uma bola que entra por um dos vértices fazendo um ângulo  $\beta$  com um dos lados adjacentes a esse vértice. A bola move-se nesta mesa sem atrito e quando choca com uma das paredes é reflectida com ângulo igual ao de incidência, a menos que saia por um canto. Este tipo de bilhar tem propriedades interessantes. No applet que está em <http://www.atractor.pt/mat/bilhar>, variando  $a$ ,  $b$  e  $\beta$ , pode aperceber-se da dependência das propriedades da trajectória da bola com estes parâmetros. Quando  $\beta=45^\circ$ , a trajectória termina sempre num dos cantos, determinável previamente, e pode-se saber através dela o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum entre  $a$  e  $b$  o que pode ver em <http://www.atractor.pt/mat/mdc>.

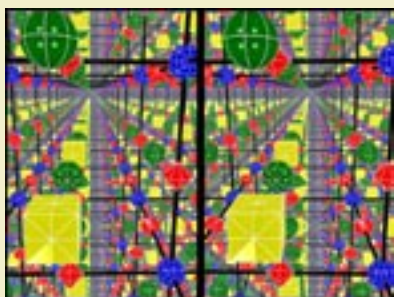
## Último Teorema de Fermat

Considerando, para cada  $n$  natural, a superfície formada pelos pontos do espaço cujas coordenadas satisfazem a igualdade  $x^n + y^n = z^n$ , é possível fazer uma leitura geométrica do enunciado do Último Teorema de Fermat. É essa a intenção do site <http://www.atractor.pt/mat/fr-in.htm> que tem uma versão estereoscópica.



## Caleidoscópio fechado

A animação em <http://www.atractor.pt/stereoP/imgs/icons/menus/sim-flash-caleido3D.htm> representa o que se veria se, ao caleidoscópio de três espelhos que constrói o cubo, se juntasse um quarto espelho, como uma tampa e, depois, se iluminassem cortes em cada um dos quatro vértices. Para já, não temos nenhum modelo físico dessa situação.



## Curvatura e torção

Qualquer objecto em movimento descreve uma curva no espaço: pensemos, por exemplo, nas curvas que as borboletas “traçam” durante os seus voos. Existe uma linguagem matemática para descrever a forma das curvas no espaço? Sim, e as palavras-chave são curvatura e torção. No site <http://www.atractor.pt/mat/curvtor> pode ver-se que este vocabulário é suficiente para distinguir a forma das curvas. Um dos applets traça uma curva que passa por um ponto fixado com certa velocidade e aceleração e que tem curvatura e torção dadas. E o problema da unicidade desta curva também é tratado no site.

## Curvas de perseguição

Em [http://www.atractor.pt/mat/logo/sessao/4\\_Simulacao/perseguiacao.html](http://www.atractor.pt/mat/logo/sessao/4_Simulacao/perseguiacao.html) pode analisar interactivamente a simulação de uma perseguição a velocidade constante em que a presa se desloca sobre os lados de um quadrado qualquer e o predador se movimenta em sua direcção traçando o rasto.

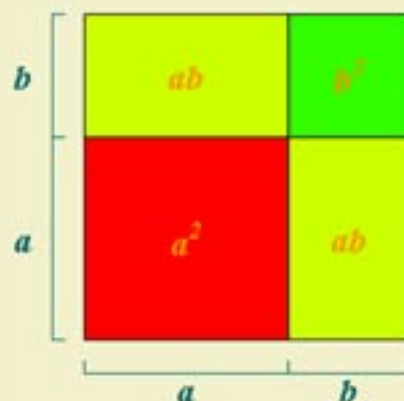
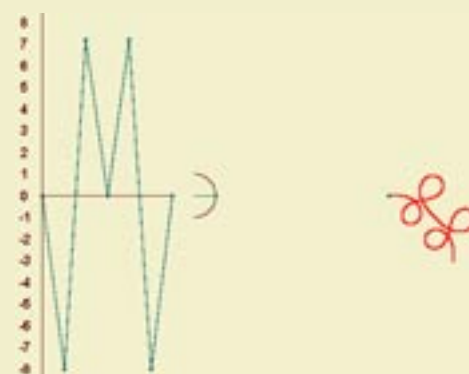
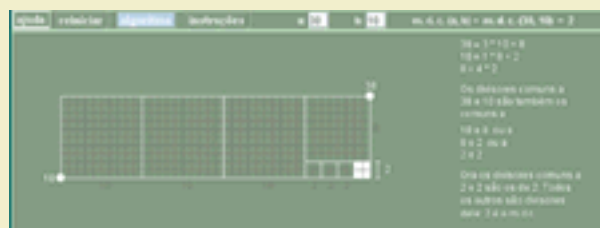


## Matemática sem palavras

As imagens e os diagramas são, cada vez mais, uma ferramenta pedagógica essencial na aprendizagem da Matemática. No site [http://www.atractor.pt/mat/sem\\_palavras](http://www.atractor.pt/mat/sem_palavras) são apresentados diversos exemplos interactivos de provas sem palavras, mostrando como um diagrama visual pode conduzir à descoberta de padrões e à dedução de resultados matemáticos.

## Algoritmo de Euclides

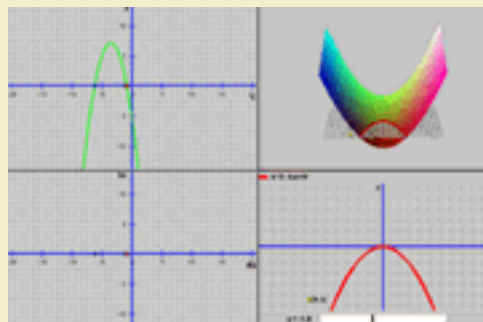
O algoritmo de Euclides é um mecanismo elementar que calcula o máximo divisor comum de dois inteiros. Pode segui-lo passo a passo no site <http://www.atractor.pt/mat/mdcEuclides>. Este applet dá também uma interpretação geométrica deste algoritmo: se num rectângulo de lados  $a$  e  $b$  ( $a < b$ ), retirarmos quadrados de lado  $b$ , obtemos um novo rectângulo com um lado medindo  $b$  e em que a medida do outro é o resto da divisão de  $a$  por  $b$ .



### Função quadrática

Através de quatro janelas no site [http://www.atractor.pt/stereoP/ imgs/icons/menus/outros-applets.htm](http://www.atractor.pt/stereoP/imgs/icons/menus/outros-applets.htm), manipuláveis em simultâneo, pode observar o comportamento da função quadrática  $x \rightarrow ax^2 + bx + c$ .

Nas duas janelas do lado esquerdo estão visíveis, respectivamente, a parábola que representa a função e os seus zeros. A parábola vermelha na segunda janela do lado direito representa, para um valor fixo de  $a$ , o lugar geométrico dos pontos do plano  $(b,c)$  em que o binómio discriminante  $b^2 - 4ac$  é nulo; ele separa este plano em duas regiões, uma com discriminante positivo e outra com discriminante negativo. A superfície representada na outra janela, um cilindro parabólico, é o gráfico da função  $(b, c) \rightarrow b^2 - 4ac$ , ou seja, o conjunto dos pontos de  $R^3$  da forma  $(b, c, b^2 - 4ac)$ . A terceira coordenada de cada ponto desta superfície representa, pois, o

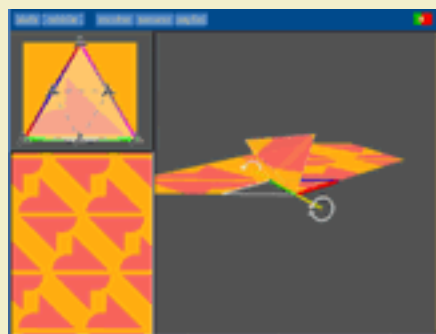


discriminante e a parábola anterior separa os pontos da superfície que estão acima do plano  $(b, c, 0)$  dos que estão abaixo.

### Simetrias

Friso e padrão referem-se a desenhos planos que se repetem periodicamente em uma ou mais direcções, respectivamente.

Num padrão existem duas translações, em direcções diferentes, que o enviam sobre si próprio. É possível obter um padrão, a partir de um motivo, utilizando duas translações com direcções diferentes. Mas além das translações, também poderíamos usar rotações, reflexões e/ou reflexões deslizantes para repetir o motivo. Apesar disto sugerir que é possível obter uma grande variedade de padrões diferentes, na verdade, são apenas 17 e, no caso dos frisos, apenas 7. Para cada tipo de padrão/friso é possível associar um carimbo que produz a sua simetria, usando um motivo que não exiba nenhuma simetria. O conjunto de 24 applets, que podem ser acedidos a partir de <http://www.atractor.pt/mat/orbifolds/links.html>, permite ao utilizador carimbar cada um dos 7 tipos de frisos e dos 17 tipos de padrões existentes, com motivos por si inseridos (segundo ideias da teoria de orbifolds desenvolvida por W.Thurston).



### Puzzle geométrico

No conhecido puzzle-dos-15, há um quadrado de 16 casas, estando uma vazia, onde podemos movimentar 15 peças deslocando, de cada vez, uma das adjacentes ao buraco, por forma a ordená-las e eventualmente construir uma dada figura. É sabido que só se consegue obter metade das ordenações - as correspondentes a permutações pares da configuração inicial. Se agora colarmos dois lados opostos do quadrado, teremos um cilindro e, em particular, se o buraco estiver contíguo a um desses lados, o buraco passa a ter mais uma peça adjacente. Portanto, a priori haverá mais movimentos do que no caso do quadrado. Será que num cilindro se consegue obter todas as ordenações e não só as pares? Ou será que a resposta depende do número de linhas/colunas? No applet de <http://www.atractor.pt/mat/puzzle-15>, pode jogar o puzzle num cilindro, num toro, numa tira de Möbius, numa garrafa de Klein ou mesmo num plano projectivo (mais tarde também num cubo). Notará que em algumas superfícies uma peça que parta de uma dada casa, sempre que aí retorna volta na mesma posição. Pelo contrário, em outras (não orientáveis) pode voltar com a orientação trocada. E, no caso do plano projectivo - tal como no cubo, futuramente - poderá voltar numa posição rodada em relação à inicial por efeito da curvatura.



### Sistemas de identificação

Os algoritmos de controlo servem, essencialmente, para detectar erros quando se lida com números de muitos dígitos. Estes algoritmos aparecem nos mais diversos sistemas de identificação como, por exemplo, no bilhete de Identidade, no número de Identificação Fiscal, nos códigos de barras, nas notas de Euro, no cartão visa, no NIB, etc. A base da maioria destes sistemas é a aritmética modular; mas nestas páginas [http://www.atractor.pt/mat/alg\\_controlo](http://www.atractor.pt/mat/alg_controlo) é apresentado um sistema baseado no grupo Diedral  $D_5$  da autoria do matemático holandês Verhoeff.

