# Matemática e Origami

*Oficinas de Verão - UJR 08*

## Construções no plano

### Exercício 1:

**1.1.** Numa das folhas de papel marca um ponto P e um ponto Q à tua escolha.

**1.2.** Dobra o papel por forma a que os dois pontos coincidam. A dobra assim obtida representa parte de uma recta.

**1.3.** Marca 3 pontos quaisquer nessa recta e compara as distâncias de cada um desses pontos a P e a Q. O que concluis?

**1.4.** Identifica o lugar geométrico dos pontos dessa recta.

**1.5.** No computador, abre o ficheiro *exercicio1.ggb.* Desenha um segmento [PQ] qualquer e, para esse segmento, constrói o lugar geométrico dos pontos que identificaste na alínea anterior.

### Exercício 2:

**2.1.** Noutra folha vinca um segmento de recta [AB] e um ponto P que pertença ao segmento.

**2.2.** Dobra a folha por forma a obter a recta perpendicular a [AB] que passa por P.

**2.3.** Faz o mesmo para um ponto Q que não pertença ao segmento.

**2.4.** No computador, abre o ficheiro *exercicio2.ggb* e executa as mesmas construções.

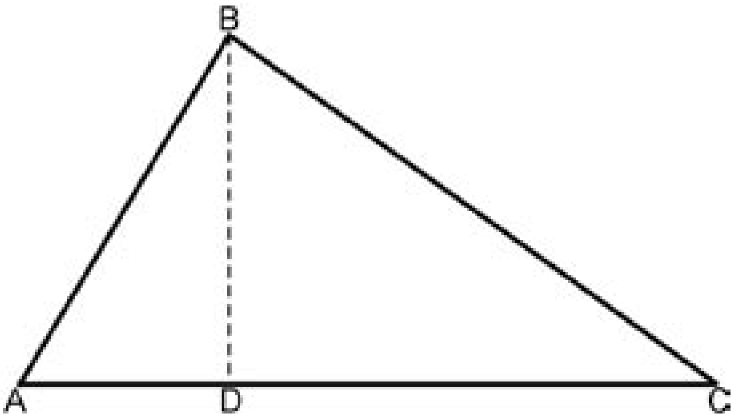
### Exercício 3:

**3.1.** Vinca novamente um segmento de recta [AB] e faz as dobragens que achares convenientes para traçar uma recta estritamente paralela ao segmento.

**3.2.** No computador, abre o ficheiro *exercicio3.ggb e executa a mesma construção.*

### Exercício 4:

**4.1.** Vinca a altura [BD] de um triângulo [ABC] dado.

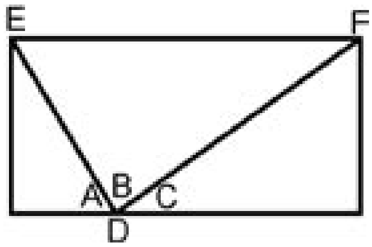



**4.2.** Dobra o triângulo por forma a fazer coincidir o vértice B com o ponto D. Seja [EF] essa dobra.

**4.3.** Qual a posição relativa de [EF] e [AC]?

**4.4.** Que relação existe entre [AE] e [EB]?

**4.5.** Dobra novamente o triângulo por forma a fazer coincidir os vértices A e C com o ponto D.




**4.6.** O que te sugere a figura assim obtida em relação à soma das amplitudes dos ângulos A, B e C?

**4.7.** Quais as dimensões do rectângulo da figura anterior em função da altura (h) e da base (b) do triângulo [ABC]?

**4.8.** Qual é a área do rectângulo?

**4.9.** Como estão relacionadas as áreas do triângulo e do rectângulo?

**4.10.** A partir da relação anterior, deduz a fórmula da área do triângulo.

**Exercício 5:**

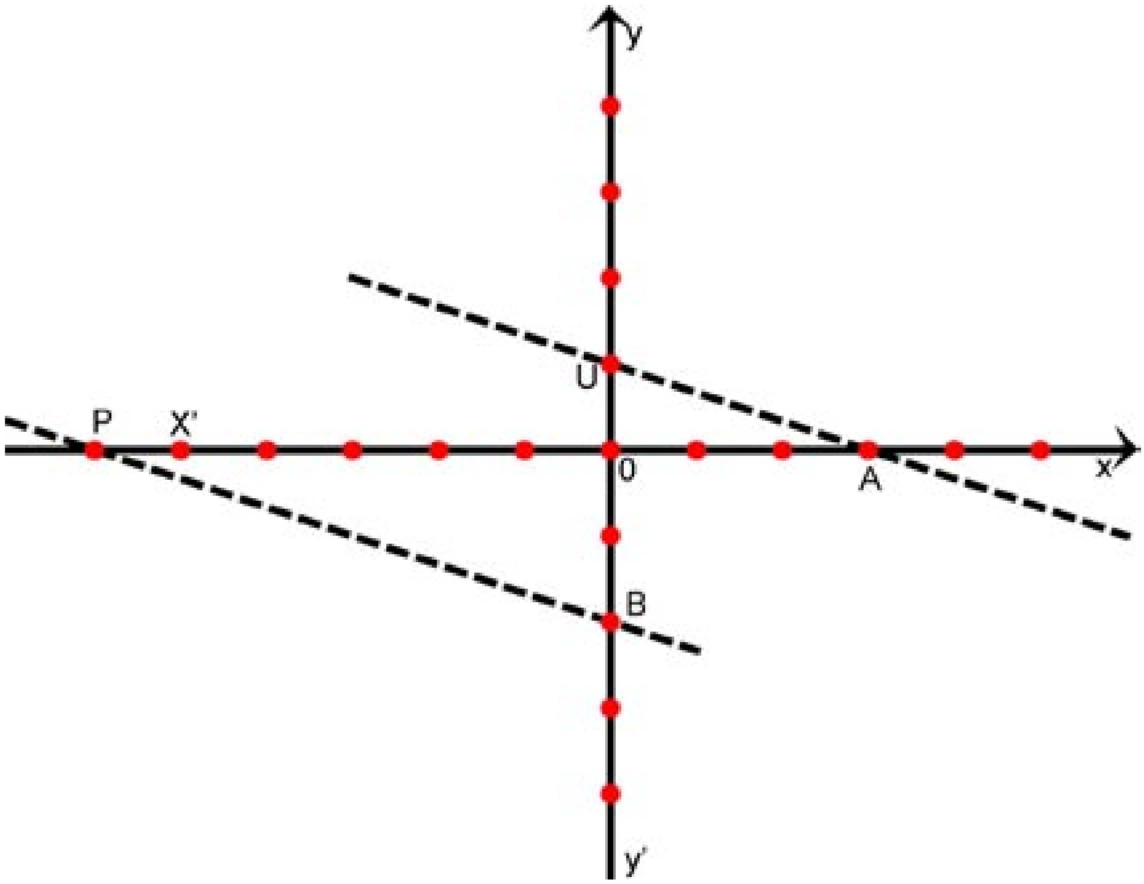
Neste exercício vamos mostrar como determinar o produto de dois números a e b:

**5.1.** Dobra duas rectas perpendiculares X'X e Y'Y que se intersectam num ponto O.

**5.2.** De seguida, marca uma série de pontos igualmente espaçados em ambas as rectas (O tem que ser um desses pontos). Estes pontos formam um sistema de coordenadas para o plano do papel.

**5.3.** Seja U o ponto de coordenadas (0,1).

**5.4.** Define [OA] e [OB] como sendo os segmentos orientados que representam a e b respectivamente.



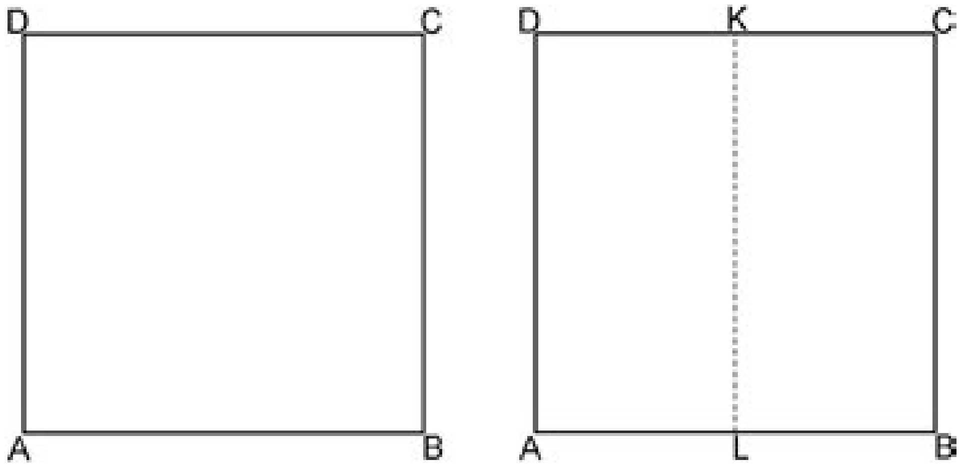

**5.5.** Une U a A e, de seguida, marca a paralela a AU que passa por B. Seja P o ponto de intersecção desta recta com a recta X'X.
$\overline{OP}$ representa o produto de a por b (nota que, neste caso, a é positivo e b é negativo). Porquê?

**5.6.** Marca agora uma recta que passe por A e B e, de seguida, a paralela a AB que passa por U. Seja Q o ponto de intersecção desta recta com X'X. Então $\overline{OQ}$ representa o quociente $\frac{a}{b}$. Porquê?

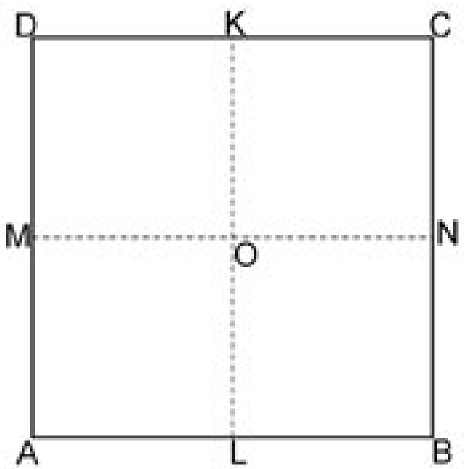
**Exercício 6:**

Dado um quadrado [ABCD], como construir um quadrado nele inscrito?
Segue os passos:

**6.1.** Dobra o lado [CB] sobre o lado [DA]. Desdobra o papel e surgirá a dobra [KL].

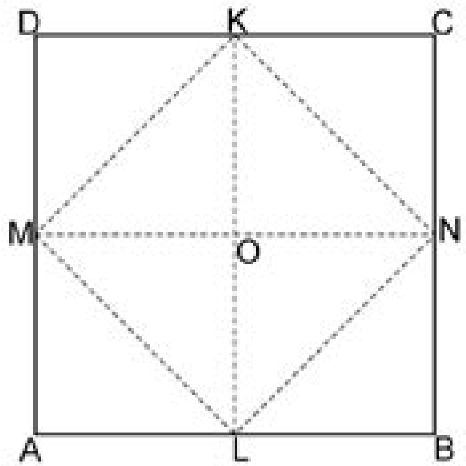



**6.2.** Dobra o lado [DC] sobre [AB]. Desdobra e designa por [MN] a dobra feita. Seja O ponto de intersecção das duas dobras.



**6.3.** Leva o ponto A ao ponto O e faz o mesmo com D, C e B.

**6.4.** Desdobra e surgirão as dobras [ML], [LN], [NK] e [KM] formando o quadrilátero [KMLN] que está inscrito no quadrado [ABCD].




**6.5.** Prova que o quadrilátero [KMLN] é um quadrado.

**6.6.** Qual a relação entre a área do quadrado [ABCD] e a do quadrado [KMLN]?

**6.7.** Utilizando o mesmo processo anterior, constrói um quadrado [PQRS] inscrito no quadrado [KMLN].

**6.8.** Qual a relação entre a área dos três quadrados construídos?

**6.9.** Deves ter reparado que, se considerarmos que l é o lado do 1º quadrado então:

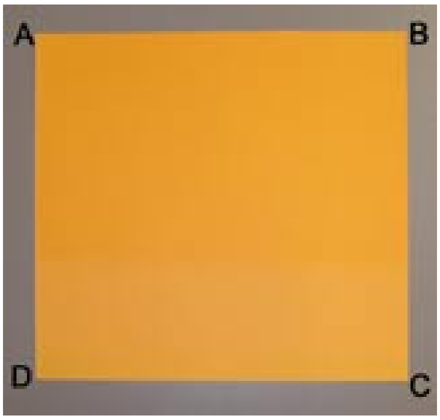
-1º quadrado tem área $l^2$
-2º quadrado tem área $l^2/2$
-3º quadrado tem área $l^2/4$

Desta forma, qual te parece ser a área do 10º quadrado? E do n-ésimo?

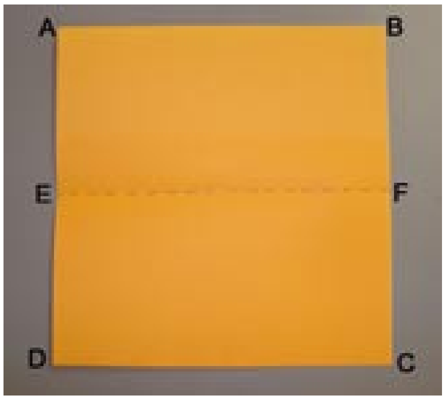
## Exercício 7:

Como dividir um quadrado de papel em 3 rectângulos iguais, usando dobras de papel? Deves seguir estes passos:

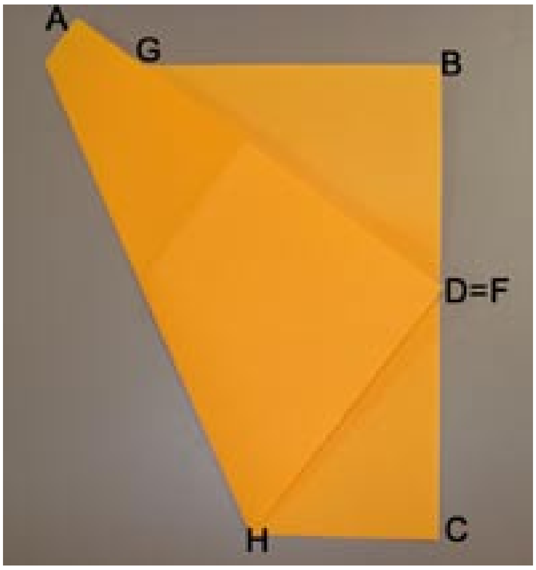
**7.1.** Dobra um quadrado de papel [ABCD], fazendo A coincidir com D e B coincidir com C. Desta forma ficam determinados E e F, pontos médios de [AD] e [BC], respectivamente.








**7.2.** Abre o papel e agora faz D coincidir com F.




**7.3.** Seja G o ponto de intersecção de [AD] com [AB] na nova posição.

**7.4.** Desta forma, $\overline{AG} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Divide a meio o segmento [GB] e, assim, [AB] fica dividido em 3 segmentos iguais.

**7.5.** Divide agora o quadrado em 3 rectângulos iguais.

Vamos ajudar-te a mostrar porque é que $\overline{AG} = \frac{1}{3}\overline{AB}$:

**7.5.1.** Seja l o lado do quadrado. Exprime $\overline{DH} + \overline{HC}$ em função de l.

**7.5.2.** Usando a igualdade anterior e aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo

[HDC], exprime $\overline{HC}$ em função de l.

**7.5.3.** Os ângulos HDC e GDB são complementares. Porquê?

**7.5.4.** Os triângulos [HDC] e [GBD] são semelhantes. Porquê?

**7.5.5.** Da alínea anterior resulta que: $\frac{\overline{BG}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{HC}}$. A partir desta igualdade exprime $\overline{BG}$ em função de l.

**7.5.6.** Finalmente, exprime $\overline{AG}$ em função de l.

**Exercício 8:** Bissecção do ângulo

Abre no teu computador o ficheiro angulo.ggb. Utiliza as ferramentas existentes para desenhar um segmento de recta [OC] que bissecte o ângulo agudo AOB.

**8.1.** Usando a opção "angulo", confirma que o segmento que desenhaste bissecta realmente o ângulo.

**8.2.** Constrói um segmento [OD] de tal forma que o ângulo AOD meça 1/4 do ângulo inicial.

Vamos agora bissectar um ângulo, usando Origami.

**8.3.** Numa folha quadrada, vinca um ângulo agudo, como o representado na figura abaixo.


**8.4.** Dobra a folha convenientemente, por forma a bissectares o ângulo.

**8.5.** Dobra a folha convenientemente, por forma a dividires o ângulo inicial em 4 partes iguais.

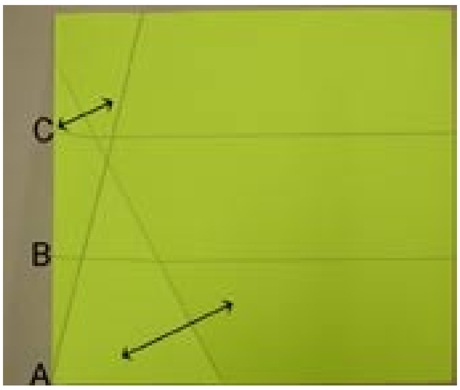
**Exercício 9:** Trissecção do ângulo

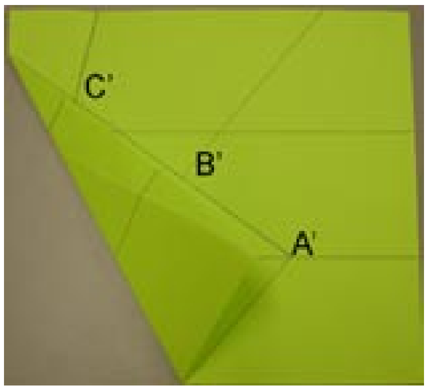
Vamos procurar um método que permita trissectar um ângulo em Origami.
Numa folha quadrada marca um ângulo agudo qualquer, como na imagem acima.

**9.1.** Dobra horizontalmente a folha (em qualquer lugar) e considera o ponto C.


**9.2.** Dobra horizontalmente a folha a partir do ponto médio - B - de [AC].

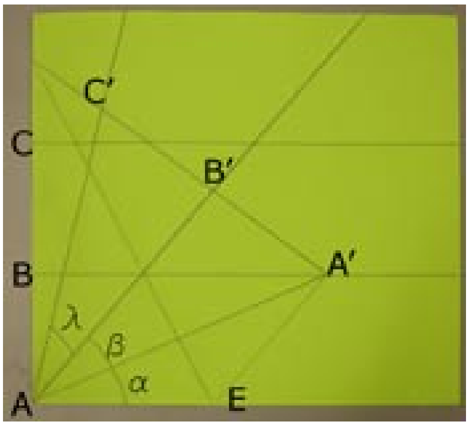

**9.3.** Dobra por forma que o ponto A fique sobre a linha horizontal indicada abaixo, e o ponto C sobre a linha oblíqua marcada no 1º passo. Marca os pontos A', B' e C' e vinca os segmentos [AA'], [AB'] e [A'C'].



**9.3.1.** Qual é a relação entre [A′B′] e [B′C′]? Explica porquê.

**9.4.** Desdobra e observa a seguinte imagem que obtiveste:




Vamos verificar que $\hat{\beta} = \hat{\lambda}$.

**9.4.1.** Os ângulos AB′C′ e AB′A′ são rectos. Explica porquê.

**9.4.2.** Tendo em conta o que viste em **9.3.1.** e **9.4.1.**, explica porque é que os triângulos [AA′B′] e [AB′C′] são iguais.

Como os triângulos [AA′B′] e [AB′C′] são iguais, conclui-se que $\hat{\beta} = \hat{\lambda}$.
Falta agora mostrar que $\alpha = \beta$.

**9.4.3.** $\overline{AE} = \overline{A'E}$ . Porquê?

**9.4.4.** O que concluis sobre o triângulo [AEA′] quanto aos lados? Qual é a relação entre o ângulo $\alpha$ e o ângulo EA′A?

**9.4.5.** O ângulo B′A′E tem amplitude igual a 90º. Porquê?

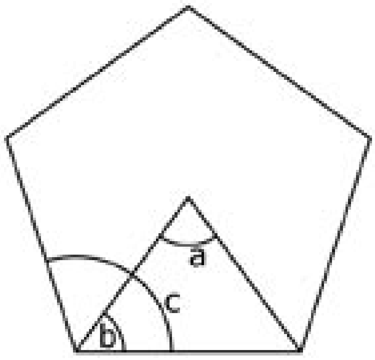
**9.4.6.** Observa os triângulos [AB′A′] e [AA′E] e explica porque é que as são válidas as seguintes relações:

$$\beta = 90^o - A\hat{A}'B' = A\hat{A}'E = \alpha$$

Temos então que $\alpha = \beta = \lambda$ e $\alpha + \beta + \lambda = o$ ($o$=ângulo inicial), logo $\alpha = \frac{1}{3}o$. Encontrámos assim um método que permite trissectar qualquer ângulo agudo. É também possível arranjar um método para trissectar, com origami, ângulos obtusos...

## Polígonos e rosáceas

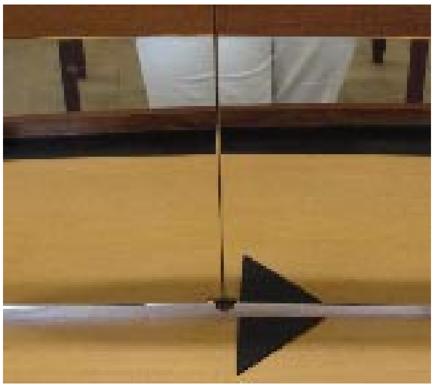
**Exercício 10:** Observa o seguinte pentágono regular.




**10.1.** Indica, justificando, a amplitude dos ângulos a, b e c.

**10.2.** Indica, justificando, qual é a amplitude de um ângulo interno de um polígono regular de n lados.

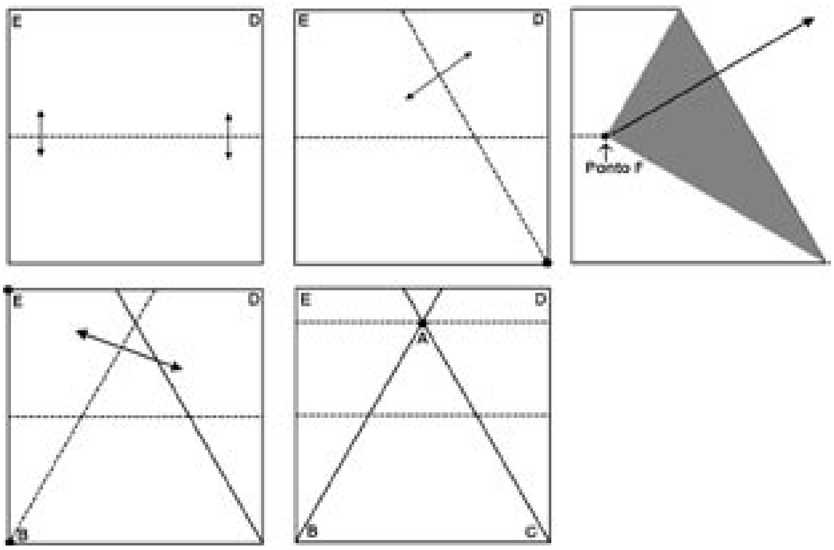
**Exercício 11:** Coloca, entre os espelhos, o triângulo isósceles e rectângulo em cartolina preta, conforme indicado na fotografia abaixo. Observa que se vê um quadrado.



**11.1.** A que polígono dará origem um triângulo equilátero quando colocado nos espelhos móveis? Porquê?

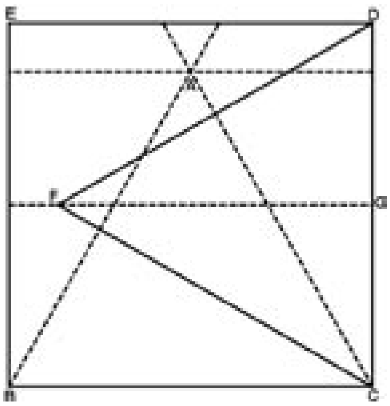
**Exercício 12:** No computador, usando o GeoGebra constrói um triângulo equilátero.

**Exercício 13:** Vamos construir em Origami um triângulo equilátero: dobra uma folha quadrada a meio e marca o vinco. Dobra a folha por forma a que um dos vértices - D-fique sobre esse vinco (ver imagem abaixo) e vinca essa dobra. Repete o procedimento para o vértice E. O triângulo [ABC] é equilátero.




Vamos verificar que o triângulo [ABC] é de facto equilátero. Considera a imagem abaixo:

**13.1** Os triângulos [CFG] e [DFG] são iguais. Explica porquê.




Da alínea anterior, concluímos que $\overline{CF} = \overline{DF}$.

**13.2.** Qual é a relação (a nível de comprimento) entre [CD] e [CF]? Classifica o triângulo [CDF] quanto aos lados.

**13.3** Indica, justificando, qual é a amplitude dos ângulos:

**13.3.1.** DCF,

**13.3.2.** BCF,
**13.3.3.** DCA
**13.3.4.** ACF,
**13.3.5.** ACB.

**13.4.** Observa que o ângulo ABC tem a mesma amplitude que ACB. Qual é a amplitude do ângulo BAC? Porquê?

**13.5.** Tendo em consideração o que viste na alínea acima, classifica o triângulo [ABC] quanto aos lados.

**Exercício 14:** Corta com uma tesoura o triângulo que dobraste. Verifica nos espelhos se a resposta que deste no **exercício 11.1.** está correcta.

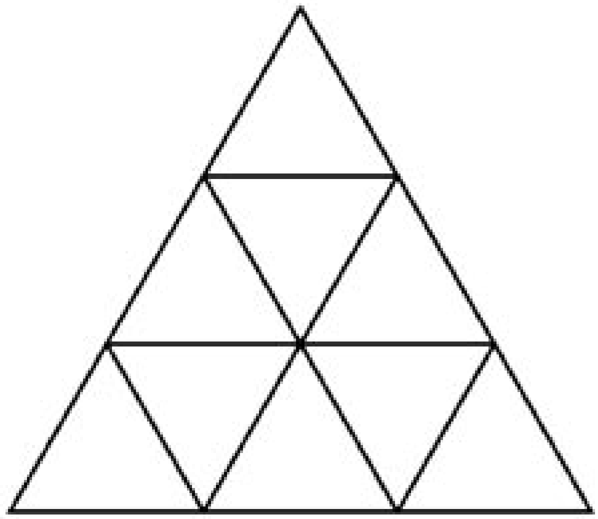
**Exercício 15:** Com dobragens, marca o incentro O do triângulo que obtiveste na alínea anterior.

Vamos agora construir um hexágono

**Exercício 16:** Dobra os 3 vértices do triângulo para o seu incentro O. Deves visualizar agora um hexágono.
O hexágono é regular? Porquê?

No **exercício 14.**, deves ter visto que um hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros iguais.

Acrescentando 3 triângulos equiláteros, podemos formar um triângulo equilátero (ver imagem seguinte).

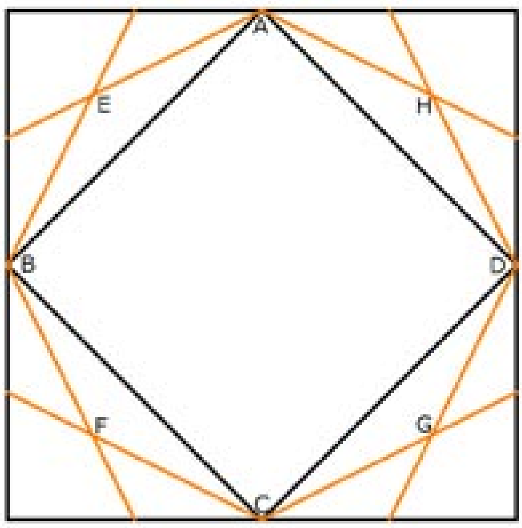


**Exercício 17:**

**17.1.** Qual é a relação entre a área do hexágono que formaste e a do triângulo inicial?

**17.2.** Sabendo que a área do triângulo é igual a $\frac{B.H}{2}$ (sendo B a base do triângulo e H a sua altura), determina a área do hexágono regular em função de b e h (b=base do hexágono, h=apótema).

**Exercício 18:**



**18.1.** Na folha quadrada marca um quadrado [ABCD] que passa pelos pontos médios da folha original (quadrada).

**18.2.** Bissecta os ângulos que os lados do quadrado inscrito fazem com o outro quadrado. Deverás visualizar o octógono [AHDGCFBE].

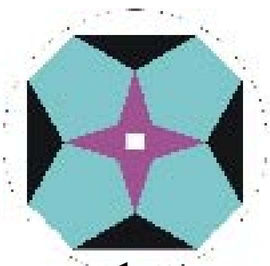
**18.3.** Determina a amplitude dos ângulos AHD e HAE. Determina $\hat{E}$, $\hat{B}$, $\hat{F}$, $\hat{C}$, $\hat{G}$ e $\hat{D}$?

**18.4.** Mostra que os lados do octógono são todos iguais entre si.

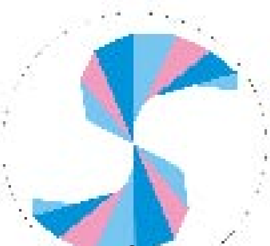
**18.5.** O que concluis quanto ao octógono [EAHDGCFB]?

## Rosáceas

**Exercício 19:** Observa as seguintes imagens. Indica quais delas têm (pelo menos) um eixo de simetria e regista o número dessas rosáceas na coluna D da tabela abaixo. Regista os restantes números na coluna C.


1


2


3


4


5


6


7


8

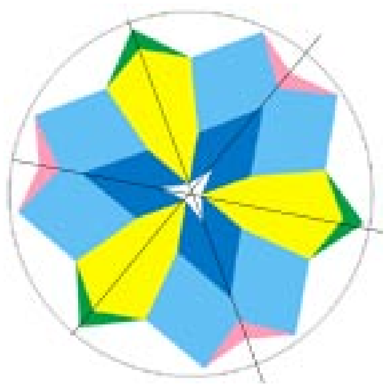
| C | D |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**19.1.** Confirma nos espelhos se as tuas respostas estão correctas.

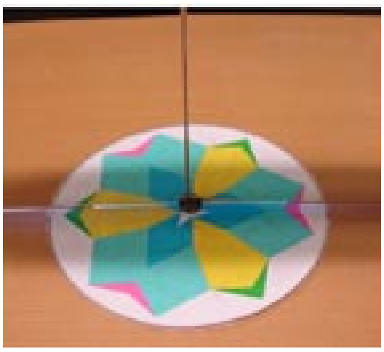
Existem dois tipos de rosáceas - as Cíclicas e as Diedrais. As primeiras não têm eixos de simetria enquanto as segundas têm pelo menos um eixo de simetria. No exercício anterior, acabaste de separar as rosáceas existentes nessas duas classes.

## Rosáceas diedrais

Considera agora apenas as rosáceas do tipo D (diedrais). Será que elas têm exactamente o mesmo esquema de simetria?
Observa a imagem abaixo. Repara que ela tem três eixos de simetria (abaixo assinalados).

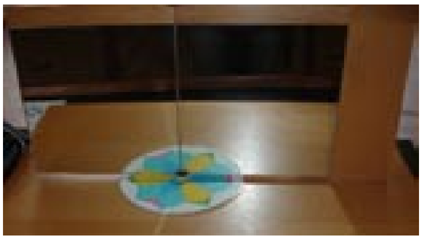


Se a colocares debaixo de um espelho por forma que um dos eixos de simetria fique por baixo dele, deverás ver a imagem inicial (ver fotografia 1).


fotografia 1

Repara que um dos espelhos é móvel. Será que é possível fechar um bocado esse espelho e colocá-lo por forma a ainda se ver a imagem inicial?

Tal é possível para 3 posições diferentes:



posição 1

posição 2

posição 3

**Exercício 20:** O ângulo mais pequeno (entre os dois espelhos) que é possível encontrar é o apresentado na "posição 3".
Qual é a amplitude deste ângulo? Porquê?

**Exercício 21:** Para cada uma das rosáceas diedrais preenche a tabela abaixo, excepto a última coluna.

| Nº | Menor ângulo possível entre os 2 espelhos | Nº de eixos de simetria (=nº de simetrias de reflexão) | Nº de simetrias de rotação |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Observa agora o seguinte módulo:

Rodando o disco anterior e colocando o ponto vermelho em cada uma das 3 posições indicadas abaixo, é possível sobrepor a imagem de cima à de baixo. Esta rosácea tem 3 simetrias de rotação.

posição 1

posição 2

posição 3

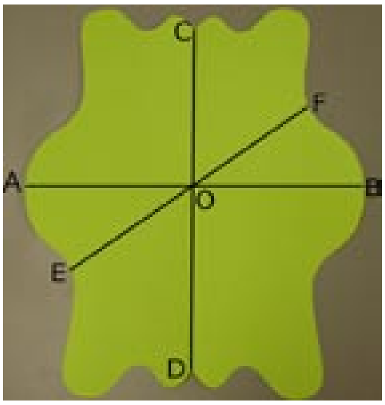
**Exercício 22:** Tendo em conta o que viste e usando os vários discos disponíveis, preenche agora a última coluna da tabela acima.

Observa na tabela anterior que o número de simetrias de reflexão é sempre igual ao número de simetrias de rotação. Isso não é coincidência! Uma rosácea com n simetrias de reflexão tem exactamente n simetrias de rotação! Tal rosácea é representada por Dn.

Do ponto de vista matemático os polígonos são as rosáceas mais simples.

**Exercício 23:** Dobra uma folha a meio e depois a meio. Faz um corte (como o indicado abaixo). Abre a folha, obténs uma rosácea.

Na rosácea marca os pontos A, B, C e D e O (ver imagem abaixo). Faz uma nova dobragem por um segmento [EF] que passa em O, mas é diferente de [AB] e [CD].




**23.1.** [EF] é eixo de simetria da figura?

**23.2.** Qual a relação entre O, E e F? Responde a esta questão para várias posições de E e F.

**23.3.** Classifica a rosácea que obtiveste.

**Exercício 24:** Corta o hexágono e o octógono que obtiveste, respectivamente, no exercício **16** e no **18**. Marca o centro de cada um dos polígonos. Dobra-os, respectivamente, em 12 e 16 triângulos (ver figuras 1 e 2).

**figura 1**

**figura 2**

Recorta um perfil (como na figura 3) e abre.

**figura 3**

**24.1.** Classifica as rosáceas que obtiveste.

## Rosáceas cíclicas

Vimos já que estas rosáceas não têm simetrias de reflexão. No entanto, elas têm simetria de rotação.

## Exercício 25:

1

2

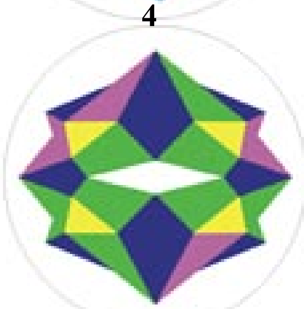
3

4

5

6

7



8

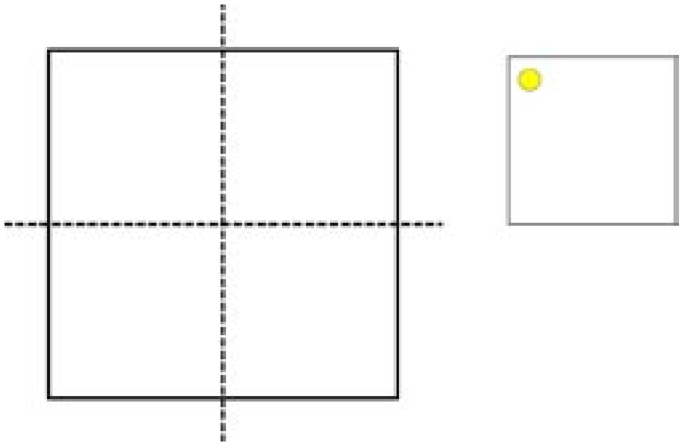
Para cada uma das rosáceas **cíclicas**, indica quantas simetrias de rotação têm e preenche a tabela abaixo:

| **Nº** | **Nº de simetrias de rotação** |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

## Rosáceas e frisos

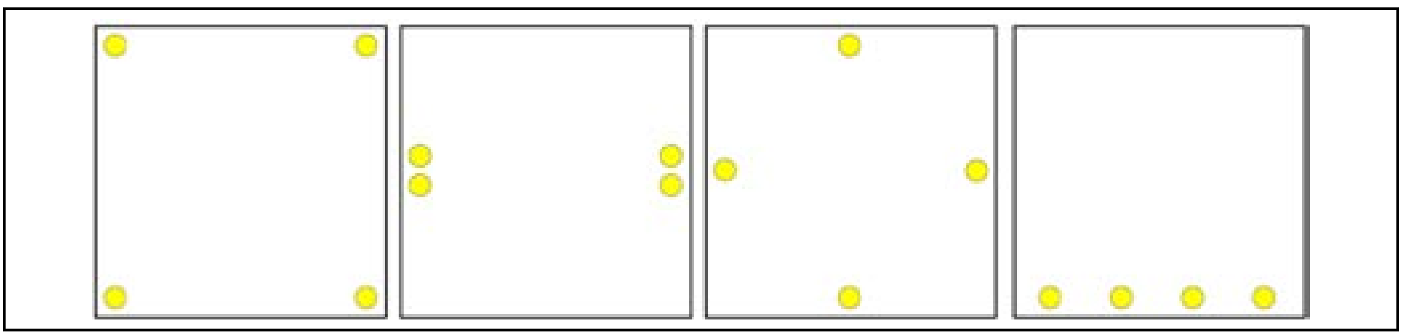
### Exercício 26:

**26.1.** Dobra um quadrado duas vezes como está indicado na figura. Depois faz um buraco como também está indicado.



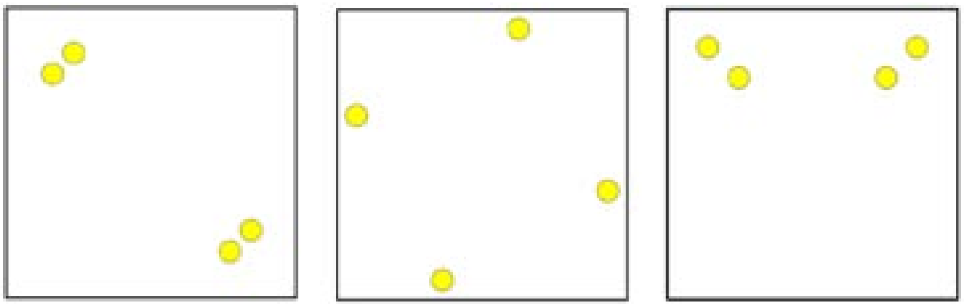
**26.2.** Desenha o que achas que vais ver quando abrires. Abre e verifica.

**26.3.** Para produzir cada uma das figuras,



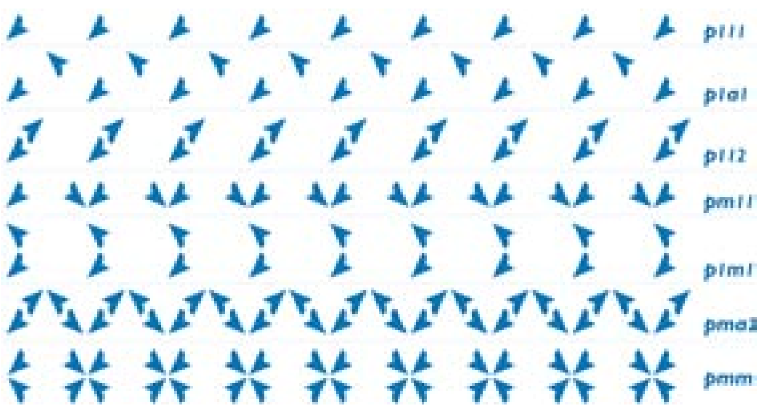
dobrou-se um quadrado duas vezes e depois foi feito um buraco.
Desenha as linhas de dobragem e marca onde terá que ser feito o buraco para se obter cada uma das figuras ao desdobrar.

**26.4.** Pensa agora na possibilidade de obter por um processo análogo ao anterior cada uma das figuras. No caso de achares que é possível mostra como; no caso de achares que é impossível explica porquê.



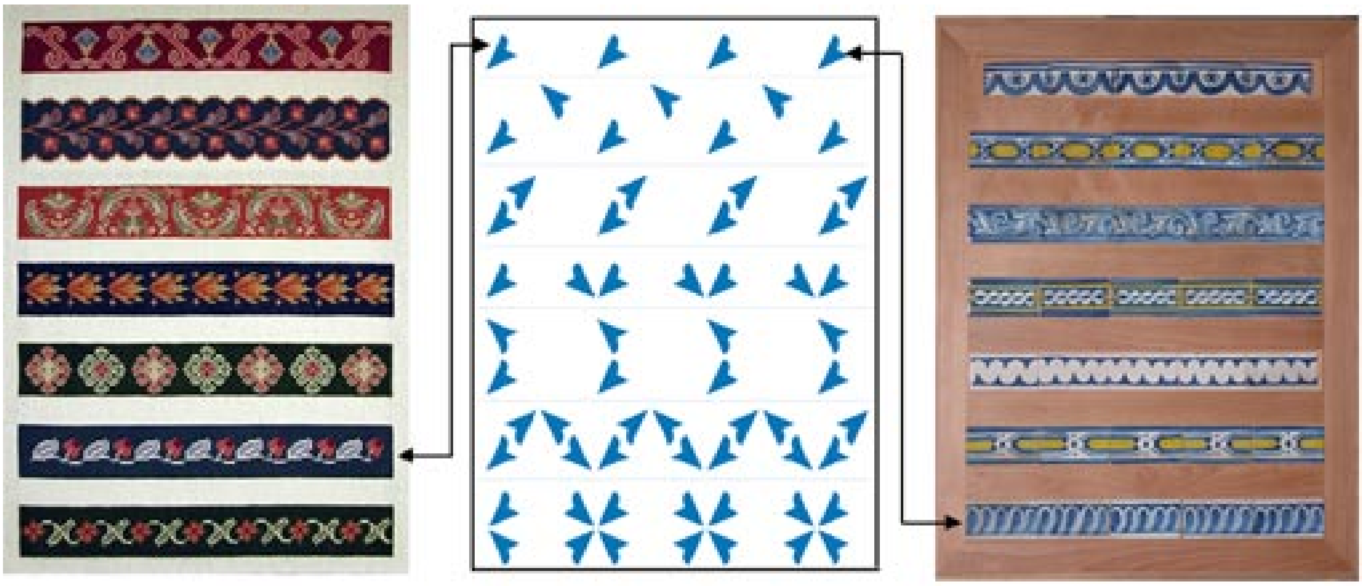
## Frisos

**Exercício 27:** É possível verificar que no plano só existem 7 tipos de frisos. Abaixo encontram-se esquematizados os 7 tipos.




**27.1.** Para cada friso, indica as isometrias do plano que o fixam (simetrias do friso).

**Exercício 28:** As seguintes imagens representam, respectivamente, um painel em Arraiolos com exemplos dos 7 tipos de frisos, o painel acima e um painel de Azulejos com exemplos dos 7 tipos de frisos. Completa o esquema, fazendo a correspondência entre frisos do mesmo tipo.



**Exercício 29:** Considera a caixa de espelhos constituída por dois espelhos paralelos entre si.

**29.1.** Colocando uma ou duas peças, determina quais dos frisos indicados no **exercício 27** podem ser feitos na caixa de espelhos.

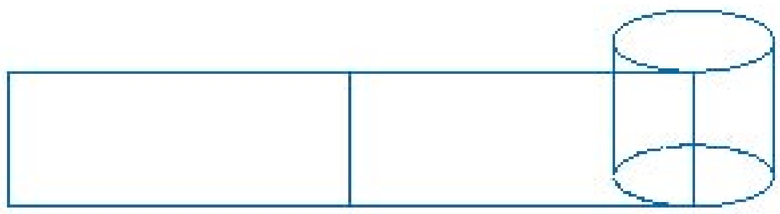
**29.2.** Para os frisos em que isso não é possível, explica a razão pela qual tal acontece.

**Exercício 30:** Seguindo as regras abaixo, constrói os 5 frisos que se encontram nas folhas anexas:

**30.1.** Dobrar em acordeão (para cima, para baixo, para cima) como para os vulgares bonecos e recortar.
Obtém-se um esquema do tipo b d b d b d .

**30.2.** Dobrar a tira ao meio, pelo seu comprimento (com uma dobra para cima) e depois em acordeão como no caso 1, antes de recortar o desenho.
Obtém-se um esquema do tipo b d b d b d
p q p q p q .

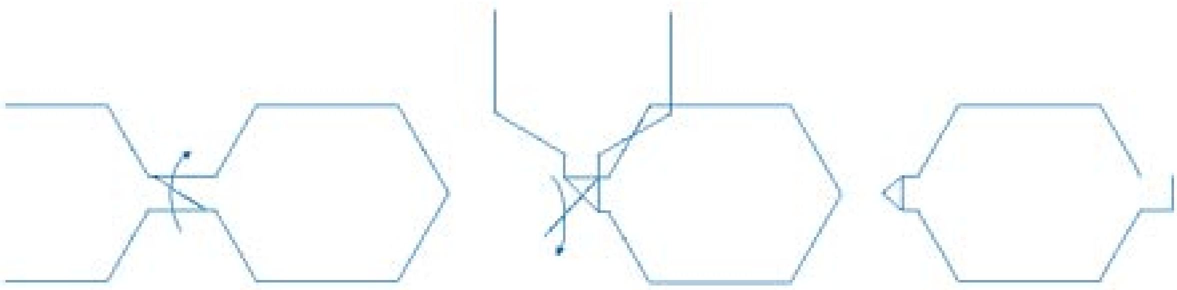
**30.3.** Enrolar o último terço da tira, de modo a formar um cilindro e enrolar por cima a parte restante da tira. Para facilitar a operação, convém eliminar as partes tracejadas e fazer coincidir os encaixes correspondentes.



Depois fazer o recorte, de acordo com o desenho (que, naturalmente, deve coincidir nos dois lados opostos verticais do rectângulo que representa o cilindro aberto). Obtém-se um esquema do tipo b b b b b b .

**30.4.** Dobrar a tira ao meio, pelo seu comprimento (com uma dobra para cima) e a seguir enrolá-la como no caso 3 (eliminar primeiro as partes tracejadas para facilitar a operação); por fim recortar.
Obtém-se um esquema do tipo b b b b b b
p p p p p p .

**30.5.** Depois de ter eliminado as partes tracejadas, dobrar ao longo dos segmentos indicados que se cruzam perpendicularmente no centro da parte estreita da tira (a direcção é arbitrária, desde que as duas dobras sejam perpendiculares) a partir do fim.



Por fim, recortar. Obtém-se um esquema do tipo b q b q b q .

**30.6.** Classifica cada um dos frisos que obtiveste.

## Construções no plano 2

**Exercício 31:** Suponhamos que temos um quadrado cuja medida do lado é $a$. Diz qual deverá ser a medida do lado de um 2º quadrado para a área deste ser o dobro da área do 1º quadrado. Explica porquê.

Vamos resolver a questão anterior geometricamente:

**Exercício 32:** Abre o ficheiro quadrado.ggb. Aí encontras um quadrado de lado $a$. Desenha um quadrado cuja área meça o dobro da área do quadrado visível.

**Sugestão:** no **exercício 31**, deves ter concluído que o lado de um tal quadrado mede $\sqrt{2}a$. Começa por traçar um segmento com este comprimento.

*Observação: No exercício 6, viste já como, partindo de uma folha quadrada, vincar um outro quadrado cuja área é metade do quadrado inicial.*

E se em vez de área, pretendêssemos o volume?

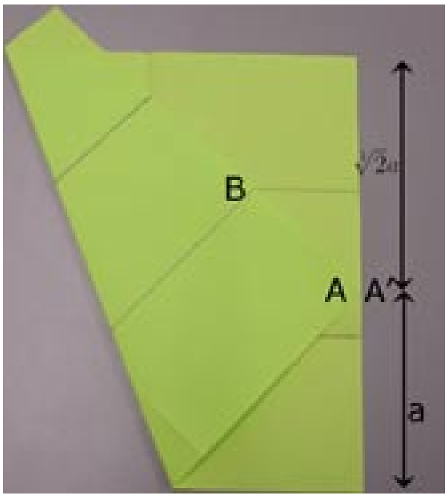
**Exercício 33:** Consideremos um cubo cuja medida da aresta é $a$. Diz qual deverá ser a medida da aresta *b* de um segundo cubo para o volume deste ser o dobro do volume do primeiro cubo.

**Exercício 34:** Dado um segmento de comprimento $a$, como construir em Origami um segmento de comprimento *b*, tal que o cubo de aresta *b* tenha o dobro do volume do cubo de aresta $a$?

No exercício **33**, deves ter concluído que $b=\sqrt[3]{2}a$.
Vamos começar por vincar dois segmentos que têm entre si uma razão de $\sqrt[3]{2}$.

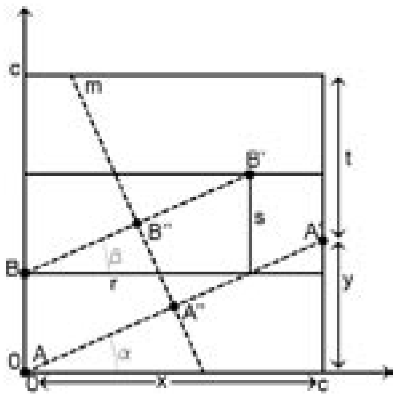
**34.1.** Pega na folha com as dobragens que executaste na **exercício 7** - a folha encontra-se já dividida em 3 partes iguais. Designaremos o comprimento do lado da folha por c.

**34.2.** Dobra por forma que o ponto A fique sobre a borda direita, e o ponto B sobre a linha horizontal indicada abaixo.




Considera o ponto A' da borda lateral direita. Vamos ver que os 2 segmentos em que este ponto divide a borda lateral direita têm uma razão entre si de $\sqrt[3]{2}$.

**34.3.** Considera os pontos A' e B' e marca a mediatriz de AA' (que é também a mediatriz de BB'). Vamos considerar o seguinte referencial




**34.4.** Observa que $\tan(\beta) = \frac{s}{r}$ e completa a igualdade $\tan(\alpha) = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

**34.5.** Observa que

s= ordenada de B'- ordenada de B;
r= abcissa de B'- abcissa de B;

logo

$$\tan(\beta) = \frac{ordenada\ de\ B' - ordenada\ de\ B}{abcissa\ de\ B' - abcissa\ de\ B}$$

completa as seguintes igualdades:

y=.........................................................
x= .........................................................

$$\tan(\alpha) = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

**34.6.** Vamos designar o valor da abcissa de B' por z e supor que y=1.

**34.6.1.** Observa o referencial acima e preenche as seguintes igualdades:

A=(0,...)
B=(0,c/...)
A'=(c,...)
B'=(z, $\frac{\ldots}{\ldots}$c)

**34.6.2.** Sabendo que, dados dois pontos distintos quaisquer $R=(x_0,y_0)$ e $S=(x_1,y_1)$, o ponto médio Q de [RS] tem coordenadas $\left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}\right)$

Determina as coordenadas do ponto médio A'' de [AA'] e B'' de [BB']:

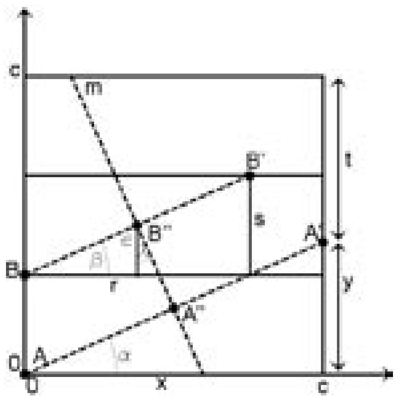
A''=(....,...)
B''=(....,...)

**34.7.** $\alpha$=$\beta$. Explica porquê.
Logo, tan($\beta$)=tan($\alpha$).

**34.8.** Tendo em conta os valores que obtiveste em **34.5.** e **34.6.1.**, completa as igualdades:

**a)** tan($\beta$)=.../z
**b)** tan($\beta$)=tan($\alpha$)=.../c

**34.9.** Partindo das igualdades anteriores, mostra que z=$c^2$/3.



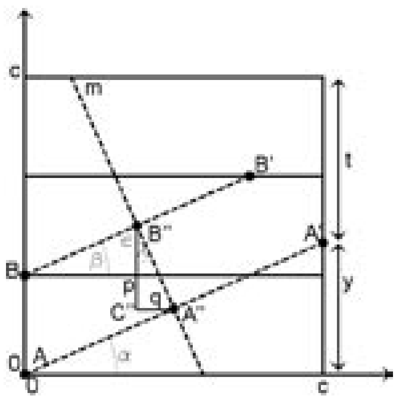

**34.10.** Observa a imagem acima e explica porque é que as seguintes igualdades são válidas:

$$\beta = 90^o - \varepsilon = \lambda.$$

Logo,

$$\tan(\beta) = \tan(\lambda)$$

**34.11.** Observa o triângulo [A''B''C''] abaixo:




**34.11.1.** Escreve $\tan(\lambda)$ em função de p e q:

$$\tan(\lambda) = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} \qquad (1)$$

**34.11.2.** Observa que:

q =abcissa de A''- abcissa de de B'';
p= ordenada de B''- ordenada de A'';

Observa as coordenadas de A'' e B'' que obtiveste em **34.6.2.** e determina os valores de p e q:

q =............................;
p=..............................;

**34.11.3.** Substituindo os valores que obtiveste na alínea anterior em (1), tem-se

$$\tan(\lambda) = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

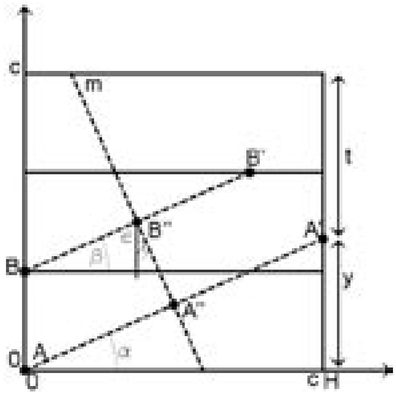
**34.11.4.** Preenche a seguinte igualdade

$$\tan(\beta) = \frac{\frac{c}{2} - \frac{z}{2}}{\dots\dots} = \frac{c - z}{\dots\dots}$$

**34.11.5.** Pelo exercício **34.9**, sabemos que $z = c^2/3$. Mostra que:

$$\tan(\beta) = \frac{c - \frac{c^2}{3}}{c - 1}$$

**34.11.6.** Conclui que a seguinte igualdade é válida $\frac{1}{c} = \frac{c - \frac{c^2}{3}}{c - 1}$
**34.11.7.** Mostra que $c^3 - 3c^2 + 3c - 3 = 0$:




**34.12.** A igualdade anterior pode ser escrita da seguinte forma $(c-1)^3 - 2 = 0$. Como $t = c-1$ (ver imagem anterior), temos que $t^3 - 2 = 0$. Qual é o valor de t?

Conseguimos encontrar assim um segmento t tal que o volume de um cubo associado a esse segmento é exactamente o dobro do cubo associado a [A'H].

**Problema:** Marca, na folha que usaste no **exercício 34**, um segmento **a** tal que um cubo com aresta **a** tenha volume igual a 2 $cm^3$.

**Sugestão:** Usando a régua, marca um ponto G no segmento [AH] tal que $\overline{GH} = 1cm$. Vinca o segmento [GA'].

**Exercício 35:**

O número de ouro é um número irracional misterioso e enigmático que nos surge numa infinidade de elementos da natureza na forma de uma razão:
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.6180033989$.

**35.1.** Dá exemplos de outros números irracionais que conheces.

**35.2.** Os números irracionais são representados por que tipo de dízimas?
Se desenharmos um rectângulo cujos lados tenham a razão entre si igual ao número de ouro, este pode ser dividido num quadrado e noutro rectângulo em que este último tem também a razão entre os dois lados igual ao número de ouro. Este processo pode ser repetido indefinidamente mantendo-se a razão constante. Um rectângulo com esta propriedade diz-se um **rectângulo de ouro**.

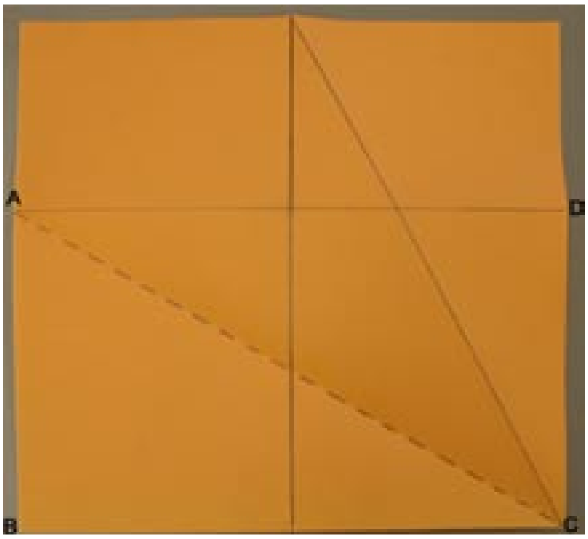
O que vos propomos agora é construir um rectângulo de ouro em origami. Para isso, a partir de uma folha de papel quadrada, devem seguir as instruções:

**35.3.** Dobrar a meio por forma a que [AB] coincida com [CD]:


**35.4.** Vincar a linha a tracejado:

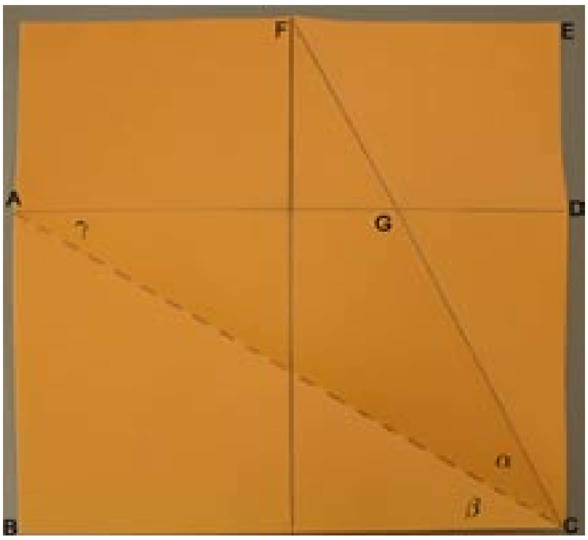
**35.5.** Desdobrar tudo e dobrar pela linha a tracejado:

**35.6.** Virar a folha e dobrar pela linha a tracejado:




**35.7.** Desdobrar tudo e virar novamente a folha:

O rectângulo [ABCD] é um rectângulo de ouro. Para provar que, de facto, [ABCD] é um rectângulo de ouro temos que mostrar que $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \Phi$. Para isso, observa com atenção a figura seguinte, que representa o resultado final das tuas dobragens, e segue os tópicos que te ajudarão a provar o resultado pretendido:




**35.8.** $\overline{AD} = \overline{EC}$. Porquê?

**35.9.** Se $\overline{AD} = \overline{EC}$ então $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{DC}}$.

**35.10.** Os triângulos [FEC] e [GDC] são semelhantes. Porquê?

**35.11.** Da semelhança dos triângulos anteriores resulta que:

$\frac{\overline{EC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{FE}}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\overline{GC}}$

**35.12.** Então $\frac{\overline{EC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{FE}+\overline{FC}}{\overline{GD}+\overline{GC}}$. Porquê?

**35.13.** Seja $l$ o comprimento do quadrado inicial. Então $\overline{AD} = \overline{EC} = l$ e $\overline{FE} = \frac{l}{2}$.

**35.14.** Usando o Teorema de Pitágoras, determina o comprimento de [FC] em função de $l$.

**35.15.** Por outro lado, sabemos que $\alpha = \beta$ e $\beta = \gamma$. Porquê?

**35.16.** Logo $\alpha = \gamma$.

**35.17.** Como classificas então o triângulo [AGC] quanto aos lados?

**35.18.** Do ponto anterior podemos concluir que $\overline{AG} = \overline{GC}$ e, assim sendo, $\overline{GD} + \overline{GC} = \overline{GD} + \overline{AG} = l$.

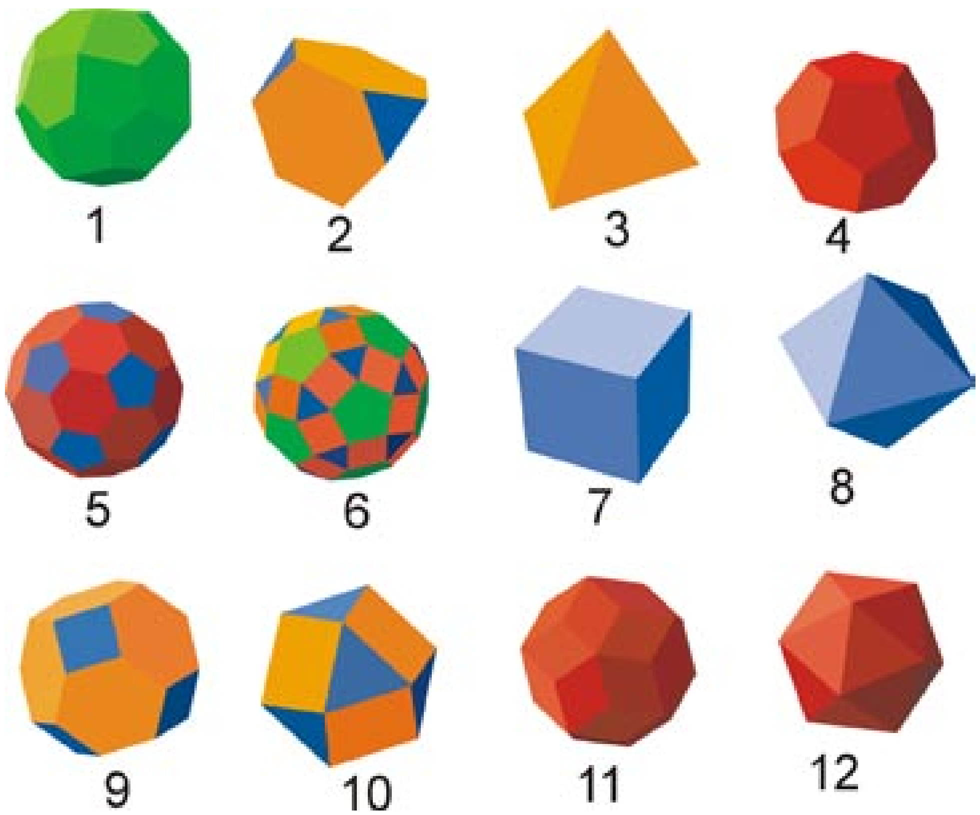
**35.19.** Substituindo os valores encontrados na fórmula do ponto **35.11.** vem que:

$\frac{\overline{EC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{FE}+\overline{FC}}{\overline{GD}+\overline{GC}} = \frac{\frac{l}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}l}{l}$.

**35.20.** Simplifica a expressão anterior e conclui o resultado pretendido.

## Poliedros

Os sólidos platónicos são poliedros convexos tais que as suas faces são polígonos regulares iguais entre si, e em cada vértice, encontram-se o mesmo número de faces.




**Exercício 36:** Quais dos poliedros acima representados são sólidos platónicos?

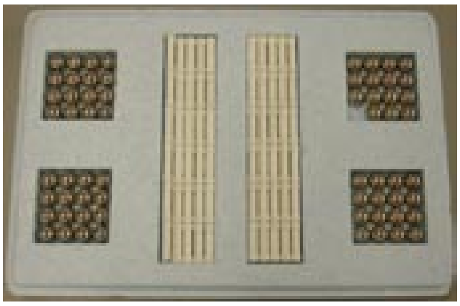
**Exercício 37:** Acede à página:

http://www.atractor.pt/webM/wm/poliedros/poliedros.jsp
Analisa os poliedros dessa página - tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro - e preenche a seguinte tabela.

| | Nº de faces | nº de arestas | nº de vértices | arestas por vértice | arestas por face |
|---|---|---|---|---|---|
| tetraedro | | | | | |
| cubo | | | | | |
| octaedro | | | | | |
| dodecaedro | | | | | |
| icosaedro | | | | | |

**Exercício 38:** Que relações encontras entre o cubo/octaedro; dodecaedro/icosaedro; tetraedro/tetraedro.

Vamos agora construir alguns sólidos platónicos.



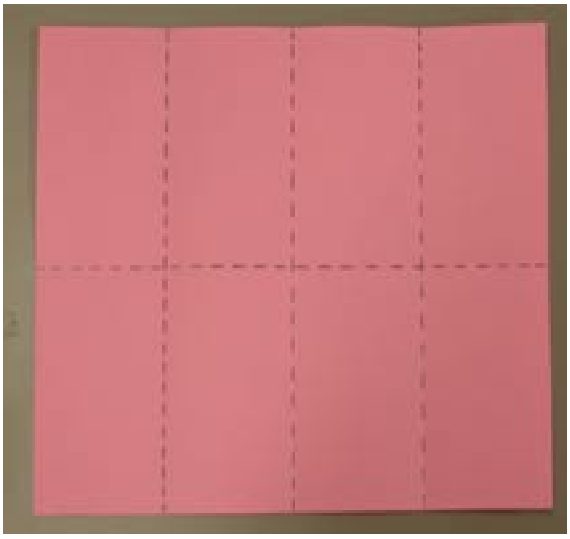
**Exercício 39:** Usando as peças de geomag (ver fotografias), constrói um octaedro e um icosaedro. Para essa construção, tem em consideração os dados da tabela que preencheste no **exercício 37**.

**Exercício 40:** Construção de um cubo

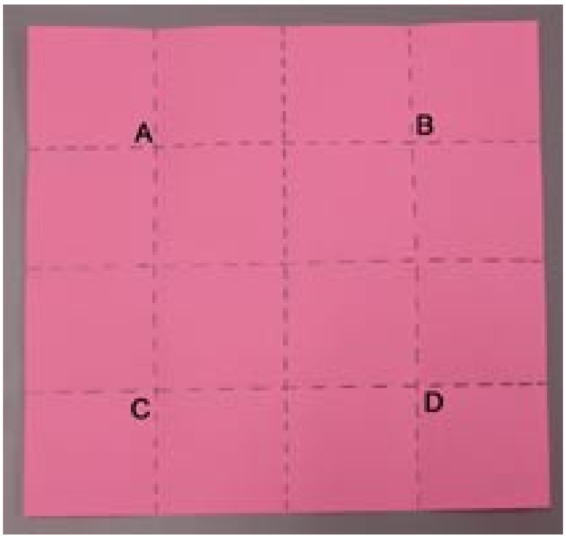
**40.1.** Dobra a meio uma folha de papel quadrada, tal como ilustra a figura:

**40.2.** Dobra novamente a meio cada uma das metades anteriores:

**40.3.** Dobra a folha quadrada outra vez ao meio, mas agora na direcção perpendicular à inicial:

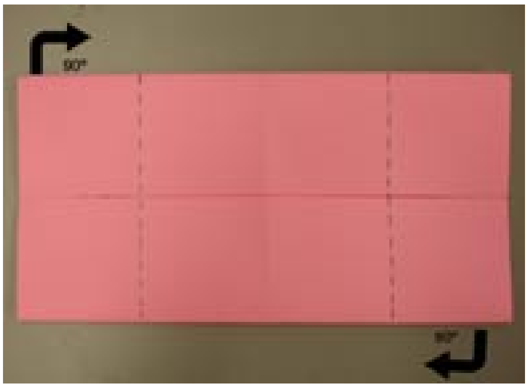


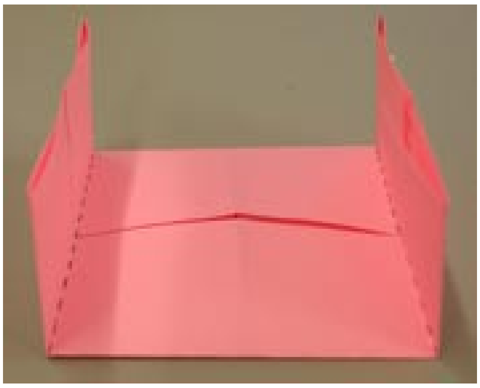
**40.4.** Dobra novamente a meio cada uma das metades anteriores:




**40.5.** Justifica que o quadrilátero [ABCD] assim obtido é um quadrado (este quadrado vai ser uma das faces do cubo).

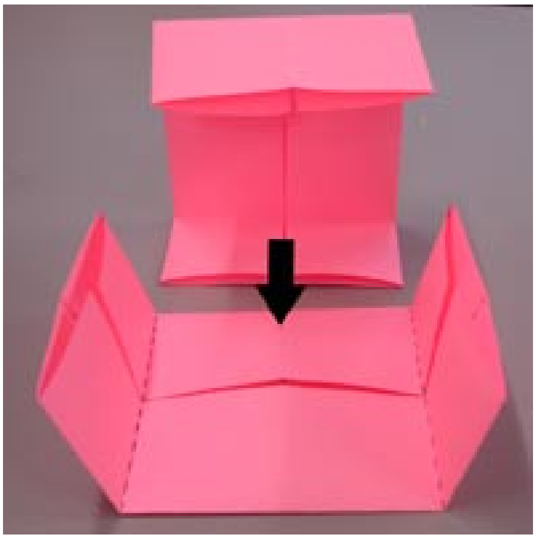
**40.6.** Procede agora como nas duas figuras seguintes:

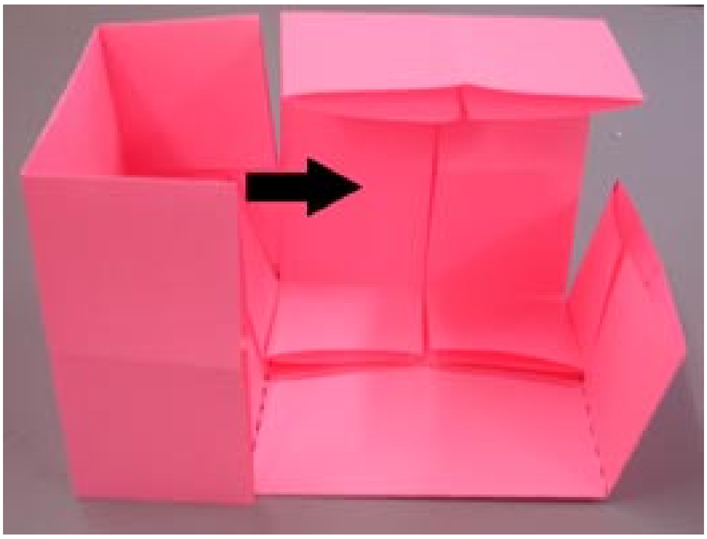


**40.7.** Constrói da mesma forma as outras cinco faces.

**40.8.** Depois de teres as seis faces do cubo construídas, é preciso montar o cubo. Para tal, procede tal com está exemplificado nas imagens:





**40.9.** De seguida, acrescenta as outras 3 faces da mesma forma para completares o cubo.

**40.10.** Analisando a construção apresentada, indica quais teriam de ser as dimensões iniciais dos quadrados de papel para que no final da construção a área de cada uma das faces laterais do cubo fosse igual a 36 $cm^2$.

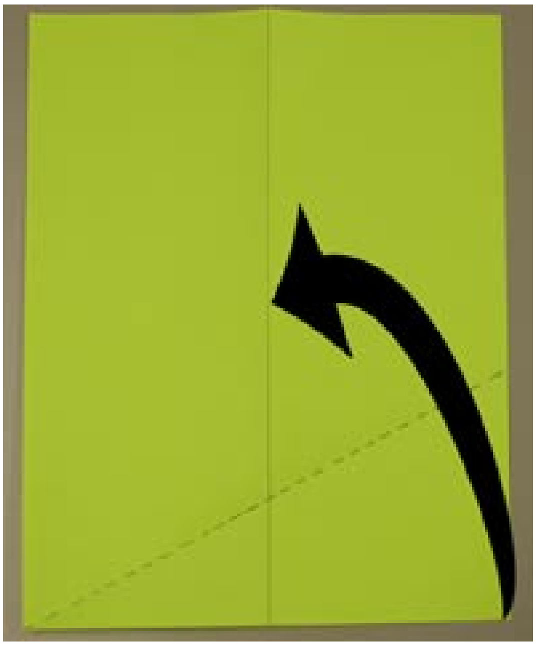
**40.11.** E se pretendêssemos construir um cubo de 64 $cm^3$ de volume? Quais seriam as dimensões dos quadrados de papel para construir cada um dos módulos deste origami?

**40.12.** Sabendo que a diagonal espacial de um cubo mede 15 cm, qual o comprimento do lado dos quadrados de papel que deram origem aos módulos do cubo?

**Exercício 41:** Construção de um tetraedro

**41.1.** Vinca ao meio uma folha A4, tal como ilustra a figura:

**41.2.** Vira a folha e dobra segundo a linha a tracejado:

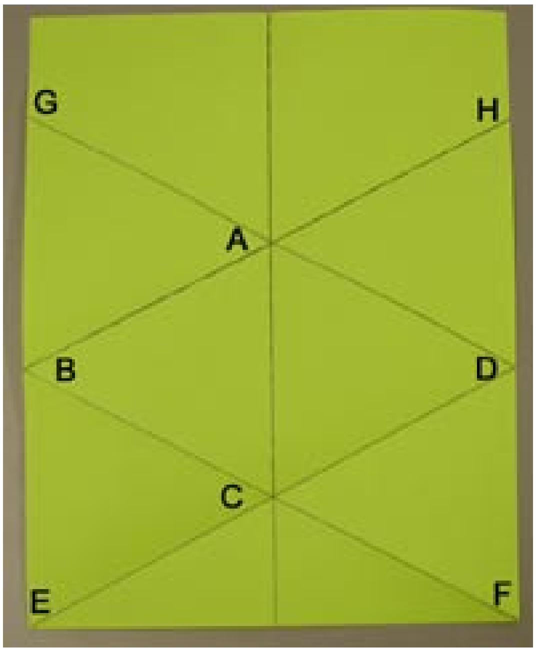


**41.3.** Vira novamente a folha e dobra outra vez pela linha a tracejado:

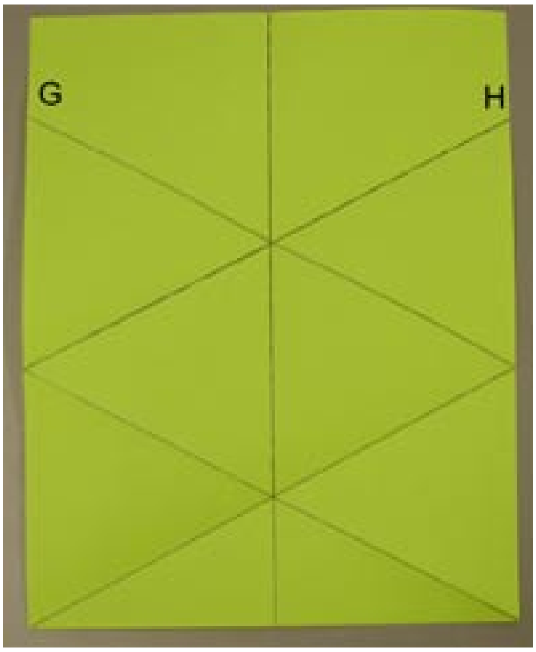
**41.4.** Abre a folha sem virar. Deves obter o seguinte:

**41.5.** Repete os passos referidos em **41.2.** e **41.3.** por forma a que o papel fique vincado desta maneira:

**41.6.** Os triângulos [HBF], [DGE], [ABC], [ADC], [AHD], [CDE], [GAB] e [BCE] são todos equiláteros. Porquê?



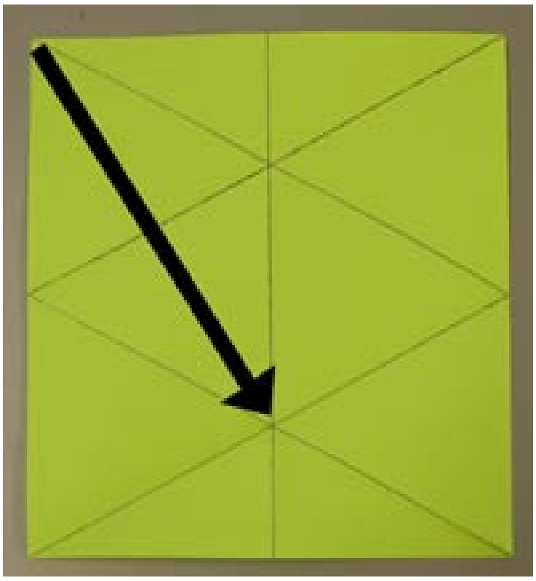

**41.7.** Corte a folha por [GH]:




**41.8.** Assim, as dimensões da nova folha estão na razão $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Porquê?

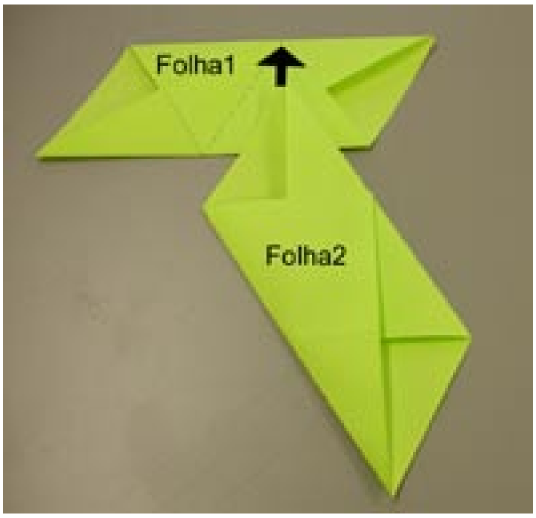
**41.9.** Com outra folha de papel A4 faz as mesmas dobras que fizeste na folha anterior.

**41.10.** Numa das folhas, faz as seguintes dobras:



**41.11.** Na outra folha, faz as dobras simétricas das anteriores em relação à recta AC.

**41.12.** De seguida, encaixa as duas folhas como mostra a imagem:




**41.13.** Forma um tetraedro “solto” com a folha 1: o vértice superior do tetraedro é formado pelos dois pontos marcados com a letra A:

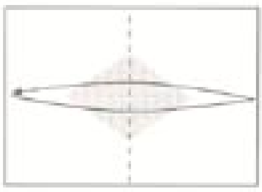

**41.14.** Com a folha 2 forma outro tetraedro “solto” da mesma forma. Os dois tetraedros ficarão firmemente “agarrados” se inserires o ponto assinalado dentro do outro tetraedro.

**41.15.** Finalmente, pressiona todos os vértices e aperfeiçoa as arestas se for necessário.

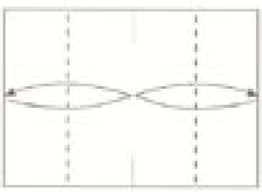
**Exercício 42:** Construção de um dodecaedro rômbico.

**42.1.** Para construir este poliedro são necessárias 12 folhas A4.

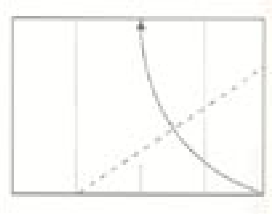
**42.2.** Dobra a folha a meio, mas vincando só as extremidades (a zona sombreada não deve ficar com vincos).



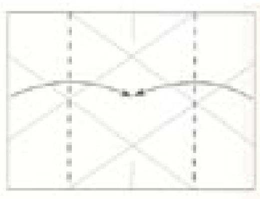
**42.3.** Virar a folha e dobrar cada uma das metades a meio.



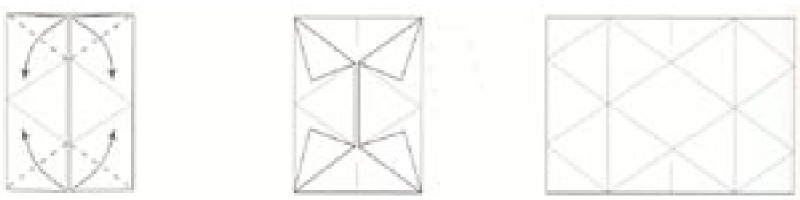
**42.4.** Dobrar pela linha a tracejado.



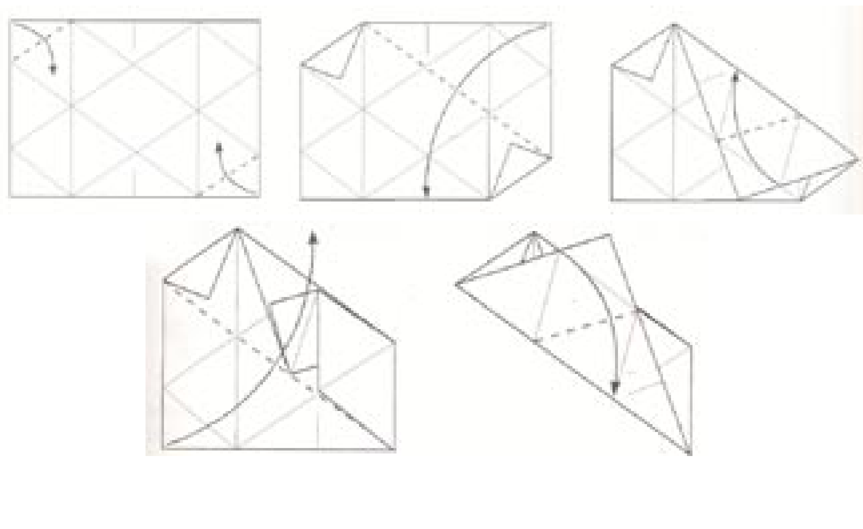
**42.5.** Repetir a dobra anterior a partir dos outros 3 cantos da folha.



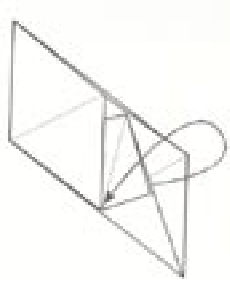
**42.6.** Dobrar pelas linhas a tracejado e abrir.



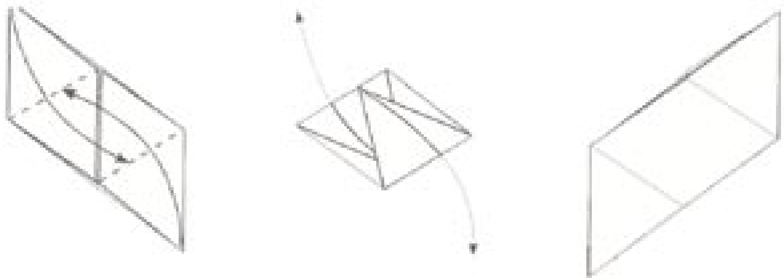
**42.7.** Dobrar outra vez pelas linhas a tracejado.



**42.8.** Puxar para fora as dobras que estão por dentro.



**42.9.** Dobrar pelas linhas a tracejado e virar.



**42.10.** Fazer as outras 11 faces.

**42.11.** Encaixar as 12 faces umas nas outras da seguinte forma: